풀이

STEP II 2018, 문제 3

순수수학 • 회전 대칭과 적분

> **STEP II 2018, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q3

핵심 아이디어

점 (a, b)를 중심으로 하는 반회전(half-turn)은 (x, y)를 $(2a - x,\, 2b - y)$로 보낸다. 따라서 이런 대칭을 갖는 곡선은 각 x 값을 그 반사인 $2a - x$와 짝짓고, 두 점의 높이의 합이 $2b$가 되게 한다. 탄젠트 함수에서는 $\tan(\frac{1}{2}\pi - x) = 1/\tan x$이므로 $x \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi - x$가 자연스러운 짝짓기이다. 이 항등식(identity) 하나로 곡선의 대칭성을 얻고, 그러면 중심에 대해 대칭인 구간에서의 적분을 실제로 적분하지 않고도 구할 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = (1 + \tan x)^{-1}$로 두고 연쇄법칙(chain rule)을 쓰면

$$f'(x) = -\frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2} = -\frac{1}{\cos^2 x\,(1+\tan x)^2} = -\frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$$
$$= -\frac{1}{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x} = -\frac{1}{1+\sin 2x},$$

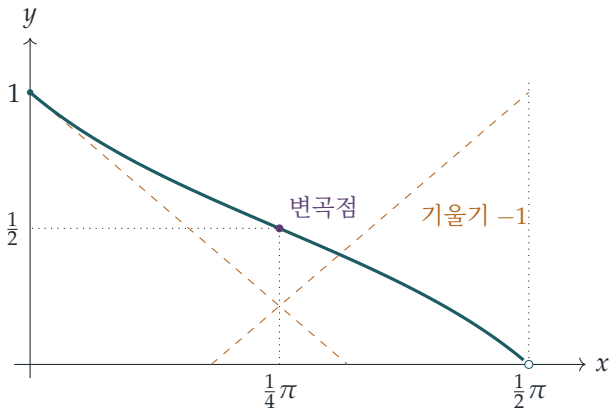
이므로 원하는 결과를 얻는다. ($1 + \tan x$에 $\cos x$를 곱하는 것이 모든 것을 깔끔하게 정리해 주는 단계이다.)

값의 범위(range)를 구하자. $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$이면 $0 \le 2x < \pi$이므로 $\sin 2x$는 $[0, 1]$의 모든 값을 갖는다. $x = 0$에서 값 0을, $x = \frac{1}{4}\pi$에서 값 1을 갖는다. 따라서 $1 \le 1 + \sin 2x \le 2$이고, 역수를 취한 뒤(모든 값이 양수이므로 부등호의 방향이 바뀐다) 부호를 바꾸면

$$-1 \le f'(x) \le -\tfrac{1}{2}.$$

양 끝값이 모두 실제로 나타난다. 즉 $f'(0) = -1$이고 $f'(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$이다.

그래프의 개형을 그려 보자. $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$이고, $x \to \frac{1}{2}\pi$일 때 $\tan x \to \infty$이므로 $f(x) \to 0$이다. 곡선은 항상 감소하며 기울기는 -1과 $-\frac{1}{2}$ 사이에 있다. $x = 0$에서 가장 가파르고(기울기 -1), $x = \frac{1}{4}\pi$에서 가장 완만하며, $x \to \frac{1}{2}\pi$일 때 다시 가파라져 기울기 -1에 가까워진다. 따라서 f'은 $\frac{1}{4}\pi$에서 최댓값을 가지며, 이 점은 변곡점(point of inflection)이다. 곡선은 $[0, \frac{1}{4}\pi)$에서 아래로 볼록(concave up)이고 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 위로 볼록(concave down)이다. (실제로 $f''(x) = 2\cos 2x/(1 + \sin 2x)^2$이고, 이는 $\frac{1}{4}\pi$에서 부호가 바뀐다.)



점선들은 기울기가 -1이다. 하나는 $(0, 1)$에서의 접선이고, 다른 하나는 $x \to \frac{1}{2}\pi$일 때 곡선이 다가가는 방향이다. 곡선은 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$를 중심으로 하는 반회전에 대해 대칭인 것처럼 보이며, 문제의 나머지 부분이 바로 이것을 다룬다.

소문항 (ii)

(a, b)를 중심으로 π만큼 회전하면 (x, y)는 $(2a - x, 2b - y)$로 옮겨진다. (a, b)가 한 점과 그 상의 중점이기 때문이다. 곡선이 (a, b)에 대해 2차 회전대칭(rotational symmetry of order 2)을 갖는다는 것은 정확히 이 회전이 곡선을 자기 자신 위로 옮긴다는 뜻이다. (이것이 가능하려면 정의역이 $x = a$에 대해 대칭이어야 한다. 즉 x가 정의역에 있을 때마다 $2a - x$도 정의역에 있어야 한다.)

($\Rightarrow$) 곡선이 이 대칭을 갖는다고 하자. 정의역의 임의의 x에 대해 $(x, g(x))$는 곡선 위에 있으므로, 그 상인 $(2a - x, 2b - g(x))$도 곡선 위에 있다. 곡선은 함수의 그래프이므로 x좌표가 $2a - x$인 곡선 위의 점은 $(2a - x, g(2a - x))$뿐이다. 따라서 $g(2a - x) = 2b - g(x)$, 즉

$$g(x) + g(2a - x) = 2b.$$

($\Leftarrow$) 정의역의 모든 x에 대해 $g(x) + g(2a - x) = 2b$라고 하자. 임의의 점 $(x, g(x))$의 상은

$$(2a - x, 2b - g(x)) = (2a - x, g(2a - x)),$$

이고, 이는 곡선 위에 있다. 따라서 이 회전은 곡선을 자기 자신 안으로 옮기며, 두 번 하면

항등변환이 되므로 곡선을 자기 자신 위로 옮긴다. 항등식에 $x = a$를 대입하면 $g(a) = b$를 얻는데, 이는 (a, b)가 곡선 위에 있다는 것과 일치한다.

적분의 경우, 원점에 대한 대칭은 $a = b = 0$을 뜻하므로 $g(-x) = -g(x)$이다. 즉 g는 기함수(odd function)이다. 왼쪽 절반에서 $x = -u$로 치환(substitution)하면

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} g(-u)\,\mathrm{d}u = -\int_{0}^{1} g(u)\,\mathrm{d}u,$$

이므로 두 절반이 서로 상쇄되어

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

소문항 (iii)

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $h(x) = \dfrac{1}{1+\tan^k x}$라 하자. (i)의 그래프를 길잡이로 삼아 $a = \frac{1}{4}\pi$, $b = \frac{1}{2}$를 시도해 본다. 정의역 $(0, \frac{1}{2}\pi)$는 $\frac{1}{4}\pi$에 대해 대칭이고, $2a - x = \frac{1}{2}\pi - x$이다.

> **?** **생각해 보기** $h(\frac{1}{2}\pi - x)$를 어떻게 간단히 할 수 있을까?

$\tan x > 0$인 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 성립하는 $\tan(\frac{1}{2}\pi - x) = \cot x = 1/\tan x$를 이용한다. 그러면 분자와 분모에 $\tan^k x$를 곱하여

$$h(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \frac{1}{1+\tan^{-k} x} = \frac{\tan^k x}{\tan^k x + 1},$$

이므로

$$h(x) + h(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \frac{1+\tan^k x}{1+\tan^k x} = 1 = 2 \cdot \tfrac{1}{2}.$$

$\tan\frac{1}{4}\pi = 1$이므로 $h(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$이고, 따라서 점 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$는 곡선 위에 있다. (ii)에 의해, 양의 상수 k가 무엇이든 곡선은 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$에 대해 2차 회전대칭을 갖는다.

적분을 구하기 위해 $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} h(x)\,\mathrm{d}x$라 하자. 구간 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$는 $\frac{1}{4}\pi$에 대해 대칭이므로, 치환 $x = \frac{1}{2}\pi - u$는 이 구간을 자기 자신으로 옮긴다(양 끝이 서로 바뀌며, 이것이 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$에서 생기는 음의 부호를 흡수한다).

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} h(\tfrac{1}{2}\pi - u)\,\mathrm{d}u = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \big(1 - h(u)\big)\,\mathrm{d}u \\ &= \left(\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\right) - I. \end{aligned}$$

따라서 $2I = \frac{1}{6}\pi$이고,

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\tan^k x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12}.$$

기하학적으로 보면, 반회전은 직사각형 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi] \times [0, 1]$ 안에서 곡선 아래의 영역과 곡선 위의 영역을 서로 맞바꾸므로, 넓이는 직사각형의 절반인 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\pi$이다. 이것은 (ii)의 논증에서 g를 $h - \frac{1}{2}$로 바꾼 것이다.

검산

- $k = 1$, $x = \frac{1}{6}\pi$일 때 $h = 1/(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}) \approx 0.634$이고, $x = \frac{1}{3}\pi$일 때 $h = 1/(1 + \sqrt{3}) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \approx 0.366$이다. 대칭성이 말하는 대로 두 값의 합은 1이다.
- 답은 k에 의존하지 않는다. $k \to \infty$일 때 h는 $x < \frac{1}{4}\pi$에서 1에 가깝고 $x > \frac{1}{4}\pi$에서 0에 가까우므로, 적분은 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$의 길이인 $\frac{1}{12}\pi$로 수렴(converge)하며, 결과와 일치한다.
- $k = 0.3, 1, 2, 3.7, 10$에 대해 수치적분(numerical integration)을 하면 매번 0.2617994가 나와 $\pi/12 \approx 0.2617994$와 일치한다.

흔한 실수

- (i)에서 범위를 $-1 < f'(x) \leq -\frac{1}{2}$로 쓰는 것. 값 -1은 정의역에 속하는 $x = 0$에서 실제로 나타난다.
- (ii)에서 한 방향만 증명(proof)하는 것. "필요충분조건(if and only if)"이므로 대칭성 $\Rightarrow$ 항등식과 항등식 $\Rightarrow$ 대칭성을 모두 보여야 한다.
- (iii)에서 $1/(1 + \tan^k x)$를 직접 적분하려는 것. 일반적인 k에 대해서는 구할 수 있는 초등 원시함수(elementary antiderivative)가 없으며, 대칭성이 이 문제의 핵심이다.

STEP 너머

(iii)의 기법, 즉 치환 $x \mapsto a + b - x$를 한 뒤 적분을 자기 자신과 더하는 방법은 흔히 "킹의 규칙(King's rule)"이라고 불린다. 이는 정의역의 대칭성을 이용해 적분을 간단히 하는 방법의 특수한 경우이며, 이 아이디어는 군론(group theory)과 물리학에서 핵심이 된다. 그곳에서는 문제의 대칭성이 어떤 적분이 0이 되는지((ii)에서처럼), 또는 간단한 값을 갖는지를 예측해 준다. 같은 논리로 모든 $k > 0$에 대해 $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^k x} = \frac{1}{4}\pi$를 계산할 수 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 이런 종류의 대칭성 논증으로 풀리는 적분이 훨씬 더 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.