풀이

STEP II 2018, 문제 2

순수수학 • 오목함수

> **STEP II 2018, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q2

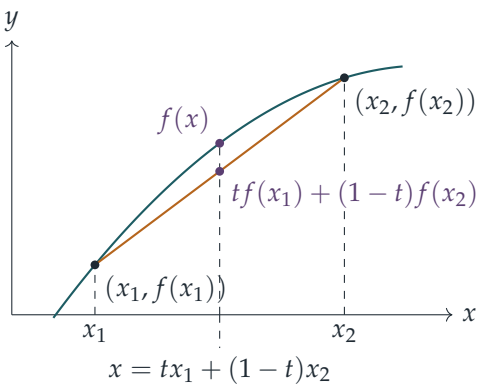
핵심 아이디어

t가 0에서 1까지 변할 때 점 $tx_1 + (1-t)x_2$는 x_2에서 x_1까지 움직이고, $tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$는 그 점 위에 있는 현(chord)의 높이이다. 따라서 오목성(concavity)은 모든 현이 곡선 위에 있거나 곡선보다 아래에 있다는 뜻이다. 이 두 점에 대한 부등식(inequality)을 얻고 나면, 이를 두 번 사용하여 세 점에 대한 형태를 얻는다. 그리고 $A + B + C = \pi$인 적절한 오목함수에 이를 적용하면 삼각형에 관한 두 부등식이 모두 따라 나온다.

풀이

그림

$x = tx_1 + (1-t)x_2$라 하자. 그러면 점 $(x,\ tf(x_1) + (1-t)f(x_2))$는 $(x_2, f(x_2))$에서 $(x_1, f(x_1))$까지의 현을 $(1-t) : t$의 비로 나누므로, x의 바로 위(또는 아래)에서 현 위에 놓인다. 정의는 x에서 곡선의 높이가 현의 높이 이상이라는 것이다.



$f'' < 0$이면 오목인 이유

$x_1 = x_2$이거나 $t = 0$ 또는 $t = 1$이면 부등식은 등식이 되므로, $0 < t < 1$이라 하고, 일반성을 잃지 않고(without loss of generality) $x_1 < x_2$라 하자(x_1, x_2를 바꾸면 t와 $1-t$가 바뀔 뿐이다). 그러면 $x = tx_1 + (1-t)x_2$는 $x_1 < x < x_2$를 만족하고,

$$x - x_1 = (1-t)(x_2 - x_1), \qquad x_2 - x = t(x_2 - x_1).$$

평균값 정리(mean value theorem)에 의해 다음을 만족하는 $c_1 \in (x_1, x)$와 $c_2 \in (x, x_2)$가 존재한다.

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$

(a, b)에서 $f'' < 0$이므로 f'은 그곳에서 순감소하고, $c_1 < c_2$이므로 $f'(c_1) > f'(c_2)$이다. 위의 길이를 대입하고 양수인 인수 $x_2 - x_1$을 약분하면

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1-t} > \frac{f(x_2) - f(x)}{t}.$$

양변에 $t(1-t) > 0$을 곱하면 $tf(x) - tf(x_1) > (1-t)f(x_2) - (1-t)f(x)$, 즉

$$f(x) > tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

따라서 f는 (a, b)에서 오목이다. 말로 하면, 곡선의 기울기(gradient)가 계속 감소하므로 x_1에서 x까지의 기울기가 x에서 x_2까지의 기울기보다 크고, 곡선은 현 위로 볼록하게 솟아 있다.

소문항 (i)

생각해 보기 어떤 두 점을 어떤 가중치로 평균하면 $\frac{1}{3}(u+v+w)$가 되는가?

v와 w를 한데 묶자. 즉 $x_1 = u$, $x_2 = \frac{1}{2}(v+w)$, $t = \frac{1}{3}$으로 잡는다. 그러면 x_2는 v와 w 사이에 있으므로 (a, b)에 속하고,

$$tx_1 + (1-t)x_2 = \tfrac{1}{3}u + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2}(v+w) = \tfrac{1}{3}(u+v+w).$$

정의에 의해

$$f\Big(\frac{u+v+w}{3}\Big) \geq \tfrac{1}{3}f(u) + \tfrac{2}{3}f\Big(\frac{v+w}{2}\Big).$$

이제 $x_1 = v$, $x_2 = w$, $t = \frac{1}{2}$로 정의를 다시 사용하면 $f(\frac{1}{2}(v+w)) \geq \frac{1}{2}f(v) + \frac{1}{2}f(w)$이다. 이 항의 계수 $\frac{2}{3}$이 양수이므로, 대입해도 부등호의 방향은 그대로 유지된다.

$$f\Big(\frac{u+v+w}{3}\Big) \geq \tfrac{1}{3}f(u) + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2}(f(v) + f(w)) = \frac{f(u) + f(v) + f(w)}{3},$$

이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

$0 < x < \pi$에서 $f(x) = \sin x$를 생각하자. 여기서 $f''(x) = -\sin x < 0$이므로 sin은 $(0, \pi)$에서 오목이다. 삼각형의 세 각은 $0 < A, B, C < \pi$와 $A + B + C = \pi$를 만족하므로, $u = A, v = B, w = C$로 소문항 (i)을 적용하면

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

따라서 $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

소문항 (iii)

$0 < x < \pi$에서 $\sin x > 0$이므로 $g(x) = \ln(\sin x)$는 그곳에서 정의되고,

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x, \qquad g''(x) = -\operatorname{cosec}^2 x < 0.$$

따라서 g는 $(0, \pi)$에서 오목이고, 소문항 (i)에 의해

$$\frac{\ln\sin A + \ln\sin B + \ln\sin C}{3} \leq \ln\sin\frac{\pi}{3} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

양변에 3을 곱하고 로그를 합치면 $\ln(\sin A \sin B \sin C) \leq \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$이다. exp는 증가함수이므로

$$\sin A \times \sin B \times \sin C \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

검산

두 상계 모두 정삼각형(equilateral triangle)에서 등호가 성립한다. $3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.598$이고 $\sin^3\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0.6495$이다. 직각이등변삼각형에서는 합이 $1 + \sqrt{2} \approx 2.414$, 곱이 $\frac{1}{2}$로, 둘 다 상계보다 작다. 무작위 삼각형 200 000개에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, 합이 2.598076을 넘거나 곱이 0.649519를 넘는 경우는 없었다. 매우 납작한 삼각형($A, B \to 0$, $C \to \pi$)에서는 마땅히 그래야 하듯이 둘 다 0에 가까워진다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $x_1 = u, x_2 = v$와 함께 $t = \frac{1}{3}$을 쓰면 $\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v$가 되어 세 수의 평균이 아니다. 두 번째 점은 v와 w의 중점이어야 한다.
- 소문항 (iii)에서 소문항 (ii)의 부등식을 곱에 바로 적용할 수는 없다. 곱을 합으로 바꾸어 주는 것은 로그이다. 또한 $\ln\sin x$가 정의되는지, 즉 $\sin x > 0$인지도 확인해야 한다.

- $f'' < 0$이 "곡선이 아래로 휜다는 뜻"이라고 말하는 것만으로는 현에 관한 부등식의 증명이 되지 않는다. 평균값 정리를 이용한 논증이 이를 엄밀하게 만든다.

STEP 너머

소문항 (i)은 옌센 부등식(Jensen's inequality)의 세 점인 경우이다. 오목함수 f와 합이 1인 가중치(weights) $t_i \geq 0$에 대하여 $f\left(\sum t_i x_i\right) \geq \sum t_i f(x_i)$가 성립하며, 이는 여기서와 똑같은 방식으로 수학적 귀납법(induction)으로 증명된다. $f = \ln$으로 두면 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)을 얻고, 확률론에서는 오목함수 f에 대해 $f(\mathrm{E}[X]) \geq \mathrm{E}[f(X)]$라는 내용이 된다. 볼록함수(convex function)와 오목함수, 그리고 두 번째 문단의 바탕이 되는 평균값 정리는 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)에서 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.