풀이

STEP II 2018, 문제 12

확률과 통계 • 최적 정지와 기댓값

> **STEP II 2018, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q12

핵심 아이디어

목표를 앞면(Heads) h번으로 정해 두면, 게임이 끝나기 전에 목표에 도달할 때에만 정확히 £h를 받고 그렇지 않으면 아무것도 받지 못한다. 따라서 상금의 기댓값(expected winnings)은 h에 앞면 h번에 도달할 확률(probability)을 곱한 것이고, 이 문제는 결국 그 확률을 구하는 문제이다. 자연수 h에 대하여 최댓값을 찾을 때는 미분하지 말고, 비 E_{h+1}/E_h를 살펴 이웃한 항끼리 비교한다.

풀이

이 풀이 전체에서 $q = 1 - p = \frac{1}{N+1}$을 뒷면(Tails)이 나올 확률로, E_h를 목표가 h일 때($h \geq 1$) 상금의 기댓값으로 둔다. 앞면 h번에 도달하면 £h를, 그렇지 않으면 £0을 받으므로

$$E_h = h \times \mathrm{P}(\text{게임이 끝나기 전에 앞면}h\text{번에 도달함}).$$

소문항 (i)

버전 1에서는 뒷면이 한 번만 나와도 게임이 끝나므로, 앞면 h번에 도달하는 것은 처음 h번의 던지기가 모두 앞면일 때와 정확히 같다. 각 던지기는 독립(independent)이므로 이 확률은 p^h이고,

$$E_h = hp^h.$$

가장 좋은 h를 찾기 위해 이웃한 값끼리 비교한다. $E_h > 0$이므로

$$\frac{E_{h+1}}{E_h} = \frac{(h+1)p^{h+1}}{hp^h} = \frac{(h+1)N}{h(N+1)},$$

이고

$$\frac{E_{h+1}}{E_h} \geq 1 \iff (h+1)N \geq h(N+1) \iff N \geq h,$$

이며, 등호는 $h = N$일 때에만 성립한다. 따라서

$$E_1 < E_2 < \cdots < E_N = E_{N+1} > E_{N+2} > \cdots .$$

이 수열(sequence)은 $h = N$까지 순증가하고, 그다음 값은 이와 같으며, 그 뒤로는 순감소한다. 그러므로 E_h의 최댓값은 E_N이고, $h = N$을 고르면 상금의 기댓값이 최대가 되어 요구한 결과를 얻는다. ($h = N+1$을 골라도 똑같이 좋다.) 최댓값은 $N(\frac{N}{N+1})^N$이다.

소문항 (ii)

이제 게임은 뒷면이 연속으로 두 번 나올 때에만 끝난다. h번째 앞면까지(그것을 포함하여)의 던지기를 각각 앞면으로 끝나는 h개의 블록(block)으로 생각하자. 앞면 h번에 무사히 도달했다면 각 블록은

$$\text{H} \quad \text{또는} \quad \text{TH},$$

이다. 뒷면이 연속으로 두 번 나왔다면 게임이 이미 끝났을 것이기 때문이다. (맨 처음에 나오는 뒷면은 괜찮다. 그 앞에는 아무것도 없다.) 거꾸로, 이런 블록 h개로 이루어진 어떤 배열에도 뒷면이 연속으로 두 번 나오지 않는다. 그 안의 각 뒷면은 앞면 바로 뒤나 맨 처음에 있고, 앞면 바로 앞에 있기 때문이다. 따라서 앞면 h번에 도달하는 것은 던지기 결과가 이 두 종류의 블록 h개로 나누어질 때와 정확히 같다.

? 생각해 보기 왜 블록들의 확률을 그냥 곱해도 될까?

앞면이 나올 때마다 게임은 처음과 정확히 같은 상태가 된다. 직전에 나온 뒷면이 없고, 앞으로의 던지기는 지난 결과와 독립이다. 따라서 각 블록은 다른 블록들과 독립적으로 다음 확률로 무사하다.

$$\mathrm{P}(\text{H}) + \mathrm{P}(\text{TH}) = p + qp = p(1+q) = \frac{N}{N+1} \cdot \frac{N+2}{N+1} = \frac{N(N+2)}{(N+1)^2}.$$

(이 두 사건은 첫 번째 던지기에서 서로 다르므로 배반(disjoint)이다.) 그러므로 앞면 h번에 도달할 확률은 $(\frac{N(N+2)}{(N+1)^2})^h$이고,

$$E_h = \frac{hN^h(N+2)^h}{(N+1)^{2h}},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

$N = 2$인 경우. 이때

$$E_h = h\left(\frac{2 \cdot 4}{9}\right)^h = h\left(\frac{8}{9}\right)^h.$$

소문항 (i)에서와 같이

$$\frac{E_{h+1}}{E_h} = \frac{8(h+1)}{9h} \geq 1 \iff 8h+8 \geq 9h \iff h \leq 8,$$

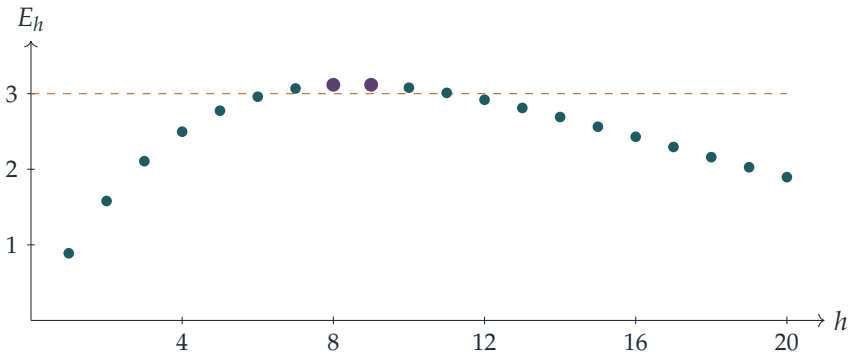
이고, 등호는 $h = 8$일 때에만 성립한다. 따라서 E_h는 $h = 8$까지 순증가하고, 그다음 $E_9 = E_8$이며, 그 뒤로는 순감소한다. 최댓값은

$$E_8 = 8\left(\frac{8}{9}\right)^8 = \frac{2^3 \cdot 2^{24}}{3^{16}} = \frac{2^{27}}{3^{16}}.$$

이 값을 어림하기 위해 밑이 3인 로그(logarithm)를 취하고 $\log_3 2 \approx 0.63$을 이용하면

$$\log_3 E_8 = 27\log_3 2 - 16 \approx 27(0.63) - 16 = 17.01 - 16 = 1.01.$$

따라서 $E_8 \approx 3^{1.01}$이고, 이는 $3^1 = 3$에 매우 가깝다. 상금의 기댓값의 최댓값은 약 £3이다.



$N = 2$일 때 버전 2에서의 값 $E_h = h(8/9)^h$. $h = 8, 9$에서의 공동 최댓값은 3을 나타내는 점선보다 조금 위에 있다.

검산

- 모두 앞면으로 시작하는 경우는 두 버전에서 모두 무사하므로, 버전 2는 버전 1보다 유리할 수밖에 없다. 실제로 $\frac{N(N+2)}{(N+1)^2} = 1 - \frac{1}{(N+1)^2} > \frac{N}{N+1}$이다.
- $N = 1$이면 버전 1에서 $E_1 = E_2 = \frac{1}{2}$이다. 앞면 한 번은 확률 $\frac{1}{2}$, 앞면 두 번은 확률 $\frac{1}{4}$이기 때문이다.
- 정확히 계산하면 $E_8 = 2^{27}/3^{16} = 134\,217\,728/43\,046\,721 \approx 3.118$이므로 £3이라는 어림값은 좋은 근삿값이다. $N = 2, h = 8$로 2×10^5번의 게임을 컴퓨터로 시뮬레이션했더니 평균 상금이 약 £3.11이었다.

흔한 실수

- 버전 2에서 맨 처음에 뒷면이 한 번 나오는 것이 허용된다는 것을 잊거나, h번째 앞면 뒤에 뒷면이 올 수 있다고 잘못 생각하는 것. h번째 앞면이 나오는 즉시 멈춘다.
- hp^h를 미분하여 그 결과를 0으로 놓는 것. 그러면 $h = -1/\ln p$를 얻는데, 이는 대개 정수가 아니며, 이것을 가장 좋은 정수로 바꾸는 데에는 주의가 필요하다. 비를 비교하는 방법(ratio test)이 더 깔끔하고 정확하다.
- 같은 값이 나오는 경우를 놓치는 것. $h = N$과 $h = N + 1$은 같은 상금의 기댓값을 주므로, "보여라"는 $h = N$에서 최댓값이 달성된다는 것만을 요구한다.

STEP 너머

이것은 간단한 **최적 정지**(*optimal stopping*) 문제이다. 여기서는 목표를 미리 정해 두지만, 그렇게 해도 손해가 없다는 것을 확인할 수 있다. 직전에 나온 뒷면 없이 앞면을 H번 얻은 상태에서, 한 번 더 던져서 얻는 이득은 H가 충분히 작을 때 정확히 양수가 된다. 이처럼 "지금 멈추기"와 "한 단계 더 가기"를 비교하여 언제 멈출지 정하는 문제는 마팅게일(martingale)과 동적 계획법(dynamic programming)으로 이어진다. 소문항 (ii)의 블록 논증은 마르코프 연쇄(Markov chain)에 대한 재생(renewal) 아이디어를 처음 맛보는 것이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)이 다음 단계로 좋다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.