풀이

STEP II 2018, 문제 11

역학 • 마찰과 모멘트

> **STEP II 2018, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q11

핵심 아이디어

세 개의 미지 접촉력은 세 방정식으로 결정된다. 수평 방향의 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law), 수직 방향 가속도가 없다는 조건, 그리고 질량중심(centre of mass)에 대한 모멘트(moment)가 평형을 이룬다는 주어진 조건이다. 두 수직항력(normal reaction)을 모두 가속도 a로 나타내고 나면, 두 가지 실패는 각각 a에 대한 임계값이 된다. 앞바퀴는 그 수직항력이 0으로 떨어질 때 들리고, 뒷바퀴는 필요한 마찰력(friction)이 그 수직항력의 μ배를 넘을 때 미끄러진다. 두 임계값 중 더 낮은 쪽이 먼저 일어난다.

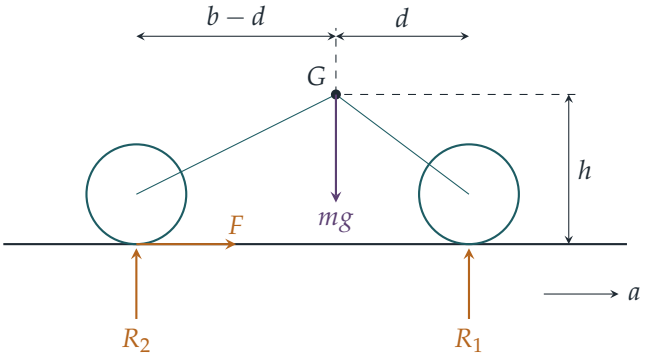
풀이

모형과 힘

오토바이를 오른쪽으로 가속도 $a \geq 0$로 직선 운동하는 강체(rigid body)로 본다. 도로가 수평이므로 질량중심 G는 수직 방향 가속도가 없고, 오토바이는 회전하지 않는다. 작용하는 힘은 다음과 같다.

- G에서 아래로 작용하는 무게 mg;
- 앞바퀴에서의 수직항력 R_1 (앞바퀴는 매끄러우므로 그곳에는 마찰력이 없다);
- 뒷바퀴에서의 수직항력 R_2와 마찰력 F. 엔진이 뒷바퀴를 구동하므로 F는 앞쪽으로 작용하며, 유일한 수평 방향의 힘이다.

앞바퀴 접촉점은 G보다 수평 거리 d만큼 앞에 있고, 뒷바퀴 접촉점은 $b - d$만큼 뒤에 있다. 두 접촉점 모두 G보다 거리 h만큼 아래에 있다.



a로 나타낸 수직항력

수평 방향과 수직 방향으로

$$F = ma, \qquad R_1 + R_2 = mg.$$

이제 G에 대한 모멘트를 구하되, 반시계 방향(앞바퀴를 들어 올리는 방향)을 양으로 잡는다. 무게는 G에 대한 모멘트가 없다. G보다 거리 d만큼 앞에서 위로 작용하는 R_1은 반시계 방향 모멘트 $R_1 d$를 가진다. G보다 거리 $b-d$만큼 뒤에서 위로 작용하는 R_2는 시계 방향 모멘트 $R_2(b-d)$를 가진다. 그리고 F는 G보다 거리 h만큼 아래에 있는 직선을 따라 앞쪽으로 작용하므로 반시계 방향 모멘트 Fh를 가진다. 합을 0으로 놓으면

$$R_1 d + Fh = R_2(b-d).$$

$F = ma$와 $R_1 = mg - R_2$를 대입하면

$$mgd - R_2 d + mah = R_2(b-d) \quad \Longrightarrow \quad R_2 = \frac{m(gd+ah)}{b},$$

이고, 따라서

$$R_1 = mg - R_2 = \frac{m\big((b-d)g - ah\big)}{b}.$$

a가 커지면 하중이 앞바퀴에서 뒷바퀴로 이동한다. 즉 R_1은 감소하고 R_2는 증가한다.

각 실패는 언제 일어나는가?

앞바퀴. 앞바퀴는 $R_1 \geq 0$인 동안, 즉

$$a \leq \frac{(b-d)g}{h} =: a_{\text{들림}}.$$

인 동안 도로에 붙어 있다.

뒷바퀴. 뒷바퀴는 $F \leq \mu R_2$인 동안, 즉

$$ma \leq \frac{\mu m(gd+ah)}{b} \iff a(b-\mu h) \leq \mu dg.$$

인 동안 미끄러지지 않는다.

생각해 보기 왜 부등호 방향을 바꾸지 않고 $b-\mu h$로 나눌 수 있는가?

바로 이것이 주어진 조건 $\mu < b/h$의 역할이다. 이 조건은 $b-\mu h > 0$임을 말해 준다. 따라서 뒷바퀴는

$$a \le \frac{\mu d g}{b-\mu h} =: a_{\text{미끄럼}}.$$

인 동안 접지력을 유지한다. (이 조건이 없다면 사용 가능한 마찰력이 필요한 마찰력과 적어도 같은 속도로 커지므로, 뒷바퀴는 결코 미끄러지지 않을 것이다.)

두 임계값은 모두 양수이며, a가 0에서부터 커질 때 뒷바퀴가 먼저 미끄러지는 것은 정확히 $a_{\text{미끄럼}} < a_{\text{들림}}$일 때이다. $b-\mu h > 0$이고 $h > 0$이므로 분모를 곱해 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\frac{\mu d g}{b-\mu h} < \frac{(b-d)g}{h} &\iff \mu d h < (b-d)(b-\mu h) \\
&\iff \mu d h + \mu h(b-d) < b(b-d) \\
&\iff \mu h b < b(b-d) \\
&\iff \mu < \frac{b-d}{h},
\end{aligned}$$

마지막 단계에서는 $bh > 0$으로 나누었다. 따라서 $(*)$가 성립하면 앞바퀴가 접촉을 잃기 전에 뒷바퀴가 미끄러지며, 이것이 보이려던 것이다. (사실 이 식의 연쇄는 두 명제가 동치임을 보여 준다.)

$(*)$가 성립할 때의 최대 가속도

$(*)$가 성립하면 $a_{\text{미끄럼}} < a_{\text{들림}}$이다. $a_{\text{미끄럼}}$ 이하의 모든 가속도는 두 조건을 모두 만족하므로, 앞바퀴는 땅에 붙어 있고 뒷바퀴는 접지력을 유지한다. 그보다 큰 가속도는 $F > \mu R_2$를 필요로 한다. 따라서 미끄러지지 않는 최대 가속도는

$$a_{\max} = \frac{\mu d g}{b-\mu h},$$

이며, 이것이 보이려던 것이다.

$(*)$가 성립하지 않을 때

이제 $\mu \ge \dfrac{b-d}{h}$이므로, 같은 동치 연쇄($<$ 대신 $\ge$를 사용)에 의해 $a_{\text{들림}} \le a_{\text{미끄럼}}$이다. 따라서 $a_{\text{들림}}$ 이하의 모든 가속도는 $R_1 \ge 0$을 유지하고 $a \le a_{\text{미끄럼}}$도 만족하므로, 뒷바퀴는 미끄러지지 않는다. $a_{\text{들림}}$을 넘어서면 $R_1 < 0$이 필요한데, 앞바퀴가 도로에 닿아 있는 동안에는 이것이 불가능하다. 따라서 앞바퀴가 접촉을 유지하는 최대 가속도는

$$a_{\max} = \frac{(b-d)g}{h}.$$

이 가속도에서 $R_1 = 0$이다. 즉 오토바이는 모든 무게가 뒷바퀴에 실린 채 막 윌리(wheelie, 앞바퀴를 드는 동작)를 하려는 순간에 있다.

검산

- $a = 0$일 때: $R_2 = mgd/b$이고 $R_1 = mg(b-d)/b$로, 지레 규칙(lever rule)에 따른 통상적인 정적 하중 분배이다. G에 더 가까운 바퀴가 더 많은 무게를 받는다.
- 경계의 경우 $\mu = (b-d)/h$에서는 $b - \mu h = d$이므로 $a_{\text{미끄럼}} = \mu g = (b-d)g/h = a_{\text{들림}}$이다. 두 답이 일치하며, 마땅히 그래야 한다.
- 수치 예: $b = 1.5\,\text{m}$, $d = 0.75\,\text{m}$, $h = 0.6\,\text{m}$, $\mu = 0.8$, $g = 9.8\,\text{m s}^{-2}$. 이때 $(b-d)/h = 1.25 > \mu$이고, $a_{\text{미끄럼}} = 5.88/1.02 \approx 5.76\,\text{m s}^{-2}$로 $a_{\text{들림}} = 12.25\,\text{m s}^{-2}$보다 훨씬 작다. 무작위로 만든 많은 오토바이에 대해 a를 조금씩 키워 가며 어느 조건이 먼저 깨지는지 기록하는 컴퓨터 검산을 해 보았더니, 두 공식과 일치했다.

흔한 실수

- 마찰력 모멘트의 부호를 잘못 잡는 것. G 아래에서 앞쪽으로 작용하는 마찰력은 앞부분을 들어 올리려 하며, 그래서 가속하면 앞바퀴의 하중이 줄어든다.
- $b - \mu h$가 왜 양수인지 말하지 않고 그것으로 나누는 것. 그것이 조건 $\mu < b/h$의 유일한 역할이다.
- 접촉점에 대한 모멘트를 구하고 그 합을 0으로 놓는 것. 오토바이는 가속하고 있으므로, 모멘트는 G에 대해서는 평형을 이루지만 다른 점에 대해서는 그렇지 않다.

STEP 너머

모멘트에 관한 주어진 조건은 질량중심에 대한 각운동량(angular momentum)의 변화율이 그 점에 대한 전체 토크(torque)와 같다는 강체 법칙의 특수한 경우이다. 여기서는 오토바이가 회전하지 않으므로 각운동량이 0이다. 다른 점에 대해서는 가속하는 물체에 ma로부터 비롯되는 "가상" 토크가 추가로 생기며, 이것이 마지막 흔한 실수를 설명해 준다. 같은 하중 이동 분석이 차량 동역학에서 제동 한계와 구동력 한계의 바탕을 이룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 동역학을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.