풀이

STEP II 2018, 문제 10

역학 • 늘어나는 줄 위의 운동학

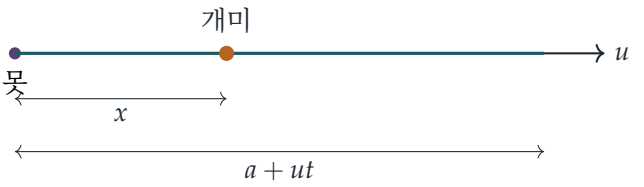
> **STEP II 2018, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q10

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.12 절 **고무줄 위의 개미**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/rubber-rope.html

핵심 아이디어

줄이 균일(uniform)하므로 줄은 모든 곳에서 같은 비율로 늘어나고, 따라서 줄 위의 각 점은 줄 전체에서 차지하는 **비율**상의 위치를 그대로 유지한다. 그러므로 한 점의 속력은 그 점과 못 사이의 거리에 비례한다. 그러면 개미에 대한 방정식은 선형(linear)이 되고, x 자체보다는 개미가 줄을 따라 간 비율 $x/(a+ut)$를 추적하는 것이 자연스럽다.

풀이



줄 위의 한 점의 속력

시각 t에서 자유로운 끝은 못으로부터 $a+ut$만큼 떨어져 있으므로 이것이 줄의 길이이다. 줄은 균일하므로 전체 길이에 걸쳐 같은 비율 $(a+ut)/a$로 늘어난다. 따라서 $t=0$일 때 못으로부터 거리 x_0에 있던 줄 위의 점은 언제나 줄 전체의 같은 비율 x_0/a인 위치에 있다.

$$x = \frac{x_0}{a}(a+ut).$$

x_0을 고정하고 미분하면 그 점의 속력은 $\frac{x_0 u}{a}$이고, 이를 현재 위치 x로 나타내면 다음과 같다.

$$\text{점의 속력, 위치} x = \frac{ux}{a+ut}.$$

확인해 보면, 이 값은 못에서 0이고 자유로운 끝에서 u이다.

개미의 방정식

못에 대한 개미의 속력은 v에 개미 아래에 있는 줄의 속력을 더한 것이므로

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + \frac{ux}{a+ut}.$$

몫의 미분법(quotient rule)을 쓰고 이 방정식을 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) &= \frac{1}{a+ut}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{ux}{(a+ut)^2} \\ &= \frac{1}{a+ut}\left(v + \frac{ux}{a+ut}\right) - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{v}{a+ut},\end{aligned}$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

끝에 도달하는 시간

$t=0$에서 $x=0$임을 이용하여 0부터 t까지 적분한다.

$$\frac{x}{a+ut} = \int_0^t \frac{v}{a+us}\,\mathrm{d}s = \frac{v}{u}\ln\left(\frac{a+ut}{a}\right) = \frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{ut}{a}\right).$$

좌변은 개미가 지나온 줄의 비율이고, 개미는 이 값이 1이 될 때 끝에 도달한다. 우변은 0에서 시작하여 한없이 꾸준히 증가하므로 이런 일은 정확히 한 번, 다음을 만족하는 시각 T에 일어난다.

$$\ln\left(1+\frac{uT}{a}\right) = k \iff 1+\frac{uT}{a} = \mathrm{e}^k \iff uT = a(\mathrm{e}^k - 1),$$

이것이 주어진 결과이다.

돌아오는 여정

이제 개미는 못을 향해 걸으므로 줄에 대한 개미 자신의 속력은 $-v$이고,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v + \frac{ux}{a+ut}.$$

생각해 보기 몫의 미분법 계산을 다시 해야 할까?

그렇지 않다. 위의 계산은 v의 부호만 빼고 그대로이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = -\frac{v}{a+ut}.$$

돌아오는 여정은 $t = T$에서 개미가 줄의 끝, 즉 $x/(a+ut) = 1$인 곳에 있을 때 시작한다. T부터 t까지 적분하면

$$\frac{x}{a+ut} = 1 - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{a+ut}{a+uT}\right).$$

개미는 이 비율이 0이 될 때 못에 도달하며, 이는 처음으로 다음을 만족하는 시각 t_1에 일어난다.

$$\ln\left(\frac{a+ut_1}{a+uT}\right) = k \iff a+ut_1 = (a+uT)\,\mathrm{e}^k.$$

따라서 돌아오는 데 걸리는 시간은

$$t_1 - T = \frac{(a+uT)(\mathrm{e}^k-1)}{u}.$$

가는 여정에서 $\mathrm{e}^k - 1 = uT/a$이고 $a+uT = a\mathrm{e}^k$이므로

$$t_1 - T = \frac{a\mathrm{e}^k}{u}\cdot\frac{uT}{a} = T\mathrm{e}^k.$$

돌아오는 여정은 $T\mathrm{e}^k$만큼 걸리며, 이는 가는 여정보다 e^k배 길다.

검산

- $u \to 0$이면 줄이 늘어나지 않는다. 이때 $k \to 0$이고 $T = a(\mathrm{e}^k-1)/u \to a/v$이며, 돌아오는 시간 $T\mathrm{e}^k \to a/v$도 마땅히 그래야 하듯 같은 값으로 간다.
- 돌아오는 시간이 더 긴 것은 이치에 맞다. 돌아오는 길에는 개미 아래의 줄이 개미를 못에서 멀어지는 쪽으로 실어 나르기 때문이다.
- 임의의 a, u, v 값(예를 들어 $a = 1, u = v$이면 $k = 1$이고 $T = \mathrm{e} - 1 \approx 1.718$)에 대해 두 미분방정식(differential equation)을 수치적으로 한 단계씩 풀어 나가면, 개미는 시각 T에 끝에 도달하고 그 뒤 $T\mathrm{e} \approx 4.67$만큼 더 지나 못으로 돌아오며, 이는 공식과 일치한다.

흔한 실수

- 줄 위의 모든 점이 속력 u로 움직인다고 생각하는 것. 그렇게 움직이는 것은 자유로운 끝뿐이다.
- 돌아오는 여정이 $t = 0$이 아니라 $t = T$에서 시작한다는 것을 잊어서, 적분상수(constant of integration)가 달라진다는 점을 놓치는 것.
- 답을 T와 k만으로 나타내라고 했는데 $(a+uT)(\mathrm{e}^k-1)/u$로 남겨 두는 것.

STEP 너머

$\int \mathrm{d}t/(a+ut)$가 발산(diverge)하므로, 줄이 아무리 빨리 늘어나도 개미는 언제나 끝에 도달한다. 개미가 지나온 거리를 줄 전체에 대한 비율로 나타내면 시간의 로그(logarithm)처럼 증가하며, 만약 늘어나는 속도가 더 빠르다면(예를 들어 지수적으로 늘어난다면) 적분이 수렴(converge)하여 개미는 끝내 도착하지 못할 수도 있다. 그 자체가 팽창하는 공간을 일정한 속력으로 지나간다는 같은 아이디어가 우주론(cosmology)에도 나타나는데, 여기서 이 아이디어는 먼 은하에서 온 빛이 언젠가 우리에게 도달할 수 있는지를 결정한다. 여기서 알맞은 양을 찾아내어 푼 선형 방정식은 적분인자법(integrating-factor method)의 한 예이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.