풀이

STEP II 2018, 문제 1

순수수학 • 다항식의 근

> **STEP II 2018, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q1

핵심 아이디어

계수(coefficient)를 앞에서 읽으나 뒤에서 읽으나 같으므로, x^2으로 나누면 사차식(quartic)이 $t = x + \frac{1}{x}$에 대한 이차식(quadratic)으로 바뀐다. t의 각 값은 사차식의 근(root) 한 쌍 k, $\frac{1}{k}$를 주고, 실수 x로부터는 $|t| \geq 2$만 나올 수 있으며, $t = \pm 2$인 것은 정확히 $x = \pm 1$일 때이다. 따라서 서로 다른 근의 개수를 세는 문제는 t의 어떤 값들이 나타나는지, 그리고 그중 하나가 ± 2인지를 묻는 문제로 귀결된다.

풀이

근은 역수 쌍으로 나타난다

$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$이라 하자. $P(0) = 1 \neq 0$이므로 모든 근 k는 0이 아니고,

$$k^4 P\left(\tfrac{1}{k}\right) = 1 + ak + bk^2 + ak^3 + k^4 = P(k) = 0.$$

$k^4 \neq 0$이므로 $P(\frac{1}{k}) = 0$이고, 따라서 k^{-1}도 근이다.

치환 $t = x + \frac{1}{x}$

$P(x) = 0$을 x^2으로 나누고($x \neq 0$이므로 가능하다) $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$를 이용하면

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0 \iff t^2 + at + (b - 2) = 0.$$

이 이차방정식의 두 근을 t_1, t_2라 하면 $t_1 + t_2 = -a$, $t_1 t_2 = b - 2$이다. 전개해 보면

$$P(x) = (x^2 - t_1 x + 1)(x^2 - t_2 x + 1),$$

임을 알 수 있다. 우변이 $x^4 - (t_1+t_2)x^3 + (2+t_1t_2)x^2 - (t_1+t_2)x + 1$이기 때문이다. 따라서 P의 근은 $x^2 - t_1x + 1$의 근과 $x^2 - t_2x + 1$의 근을 모은 것이다.

이제 모든 근이 실수라는 가정을 이용한다. 각 인수 $x^2 - t_ix + 1$은 두 실근 k와 $\frac{1}{k}$를 가지며(두 근의 곱이 1이다), $t_i = k + \frac{1}{k}$는 실수이다. 0이 아닌 실수 k에 대해 $k + \frac{1}{k}$의 부호는 k의 부호와 같고,

$$\left|k + \tfrac{1}{k}\right| - 2 = \frac{(|k|-1)^2}{|k|} \geq 0,$$

이며 등호는 $k = \pm 1$일 때만 성립한다. 따라서 다음이 성립한다.

- $|t_i| > 2$이면 인수 $x^2 - t_ix + 1$은 서로 다른 두 실근을 가지며, 그 어느 것도 ± 1이 아니다.
- $t_i = 2$이면 인수는 $(x-1)^2$이고, $t_i = -2$이면 $(x+1)^2$이다.

또한 x가 $t = x + \frac{1}{x}$를 결정하므로, 서로 다른 t의 값이 같은 근 x를 공유할 수는 없다.

소문항 (i)

서로 다른 근이 k 하나뿐이면 $\frac{1}{k} = k$이므로 $k = \pm 1$이고 $P(x) = (x \mp 1)^4$이다. 전개하면

$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1, \qquad (x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1,$$

이고, 둘 다 주어진 꼴이다. 따라서 구하는 값은 $a = -4$, $b = 6$과 $a = 4$, $b = 6$이다.

소문항 (ii)

t_1, t_2(각각 $|t_i| \geq 2$인 실수)의 가능한 경우를 모두 살펴보자.

- $t_1 \neq t_2$이고 둘 다 $|t_i| > 2$인 경우: 서로 다른 근이 네 개이다.
- $t_1 = t_2$인 경우: 사차식이 완전제곱식 $(x^2 - t_1x + 1)^2$이므로, $|t_1| > 2$이면 서로 다른 근이 두 개이고 $t_1 = \pm 2$이면 한 개이다.
- $\{t_1, t_2\} = \{2, -2\}$인 경우: $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2$이므로 서로 다른 근이 두 개이다.
- t_i 중 하나는 ± 2이고 다른 하나의 절댓값이 2보다 큰 경우: 근은 ± 1(중근)과 다른 두 근이므로 서로 다른 근이 세 개이다.

? **생각해 보기** 왜 t의 값 중 하나가 반드시 ± 2여야 할까?

네 근 중 서로 다른 근이 세 개라는 것은 어떤 근이 중복된다는 뜻이고, 위의 목록을 보면 서로 다른 근이 세 개가 되는 것은 마지막 경우뿐이다. 더 직접적으로 말하면, 근은 역수(reciprocal) 쌍으로 나뉘므로 서로 다른 근의 개수가 홀수이면 어떤 근은 자기 자신의 역수, 즉 ± 1이어야 한다.

따라서 $t = 2$ 또는 $t = -2$가 $t^2 + at + b - 2 = 0$의 근이다.

$$t = 2: \quad 4 + 2a + b - 2 = 0 \iff b = -2a - 2,$$
$$t = -2: \quad 4 - 2a + b - 2 = 0 \iff b = 2a - 2.$$

그러므로 $b = 2a - 2$ 또는 $b = -2a - 2$이고, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (iii)

$b = 2a - 2$이면 t에 대한 이차식은

$$t^2 + at + 2a - 4 = (t + 2)(t + a - 2),$$

이므로 $t_1 = -2$, $t_2 = 2 - a$이다. 첫 번째 값은 $(x + 1)^2$을 주고, 두 번째 값은 $x^2 - (2 - a)x + 1 = 0$을 주므로

$$x = -1 \text{ (중근)}, \qquad x = \frac{2 - a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}.$$

모든 근이 실수라고 주어졌으므로 이 근들은 실수이다. 이는 $a^2 - 4a = a(a - 4) \geq 0$, 즉 $a \leq 0$ 또는 $a \geq 4$와 같다.

마지막 소문항

(ii)에 의해 서로 다른 근이 세 개이려면 $b = 2a - 2$ 또는 $b = -2a - 2$여야 한다. 역으로 $b = 2a - 2$라 하자(모든 근은 실수). (iii)에서 t의 값은 -2와 $2 - a$이고, 위의 경우 목록에 따르면 $2 - a = \pm 2$가 아닌 한 서로 다른 근은 정확히 세 개이다.

- $a = 0, b = -2$: $t = \pm 2$이고 $P(x) = (x^2 - 1)^2$이므로 서로 다른 근은 두 개뿐이다.
- $a = 4, b = 6$: $t = -2$가 두 번 나오고 $P(x) = (x + 1)^4$이므로 근은 하나이다.

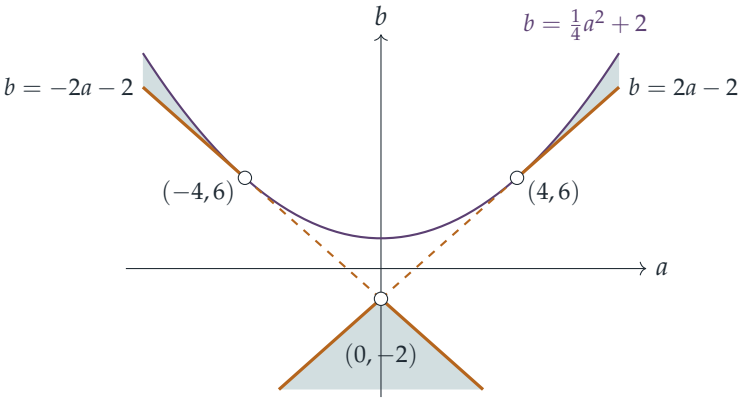
x를 $-x$로 바꾸면 P는 a가 $-a$로 바뀐 같은 꼴이 되고, 이는 두 직선을 서로 바꾼다. 따라서 $b = -2a - 2$일 때 t의 값은 2와 $-a - 2$이고, 예외는 $a = 0, b = -2$와 $a = -4, b = 6$이다.

그러므로 모든 근이 실수인 실수 a, b에 대해 $(*)$가 정확히 세 개의 서로 다른 근을 가질 필요충분조건은

$$b = 2a - 2 \text{ 또는 } b = -2a - 2, \qquad \text{단, } (a, b) \neq (0, -2),\ (4, 6),\ (-4, 6).$$

$(4, -10)$과 $(-4, -10)$은 허용된다는 점에 주의하자. 예를 들어 $a = 4, b = -10$이면 $t = 2$와 $t = -6$이므로 서로 다른 근이 세 개이다.

그림은 (a, b)-평면을 나타낸다. 색칠된 영역은 모든 근이 실수인 곳으로, 두 직선 모두의 아래쪽(t의 한 값은 -2 이하, 다른 값은 2 이상)이거나, $|a| \geq 4$에서 직선과 포물선 $b = \frac{1}{4}a^2 + 2$ 사이(t의 두 값이 같은 쪽)이다. 포물선은 $t_1 = t_2$인 곳이며, $(\pm 4, 6)$에서 직선들과 접한다. 답은 색칠된 영역의 경계에 있는 두 직선의 실선 부분에서 세 개의 빈 원을 뺀 것이다.



(직선의 점선 부분, 즉 $0 < |a| < 4$인 부분은 모든 근이 실수인 영역 밖에 있다. (iii)에서 $a \leq 0$ 또는 $a \geq 4$가 필요했던 것도 이 때문이다.)

검산

- $a = -4$, $b = -10$($b = 2a - 2$ 위의 허용되는 점)을 택하자. 그러면 (iii)에서 $x = -1, -1, 3 \pm 2\sqrt{2}$이고, 실제로 $(x+1)^2(x^2 - 6x + 1) = x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 4x + 1$이다. 근 $3 \pm 2\sqrt{2} \approx 5.828,\ 0.172$는 예상대로 서로 역수이다.
- 제외된 점 $a = 0$, $b = -2$에서 사차식은 $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$이고, 서로 다른 근은 두 개뿐이다.
- $|a| \leq 10$, $|b| \leq 15$인 범위에서 간격 $\frac{1}{4}$의 격자 위의 모든 (a, b)에 대해 컴퓨터로 근을 수치적으로 구했다. 모든 근이 실수인 1579개의 격자점 중에서 정확히 위의 조건이 예측한 88개의 점에서 서로 다른 근이 세 개였다.

흔한 실수

- 예외점을 잊는 것: $(0, -2)$와 $(4, 6)$이 그 위에 있으므로, $b = 2a - 2$만으로는 필요조건일 뿐 충분조건이 아니다.
- 중근(repeated root)이 반드시 ± 1이어야 한다고 가정하는 것: 이중으로 겹친 쌍 $k, k, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}$도 가능하지만, 이 경우 서로 다른 근은 세 개가 아니라 두 개이다.

STEP 너머

계수를 어느 방향으로 읽어도 같은 다항식을 **회문 다항식**(palindromic polynomial, 또는 상반 다항식(reciprocal polynomial))이라 하며, $t = x + \frac{1}{x}$라는 기법은 짝수 차수인 이러

한 다항식의 차수를 절반으로 줄여 준다. 같은 치환에 $x = e^{i\theta}$를 대입하면 $t = 2\cos\theta$가 되는데, 이것이 $2\cos(2\pi/n)$의 최소다항식(minimal polynomial)을 구하는 방법이자 가우스(Gauss)가 정17각형을 다룬 방법이다. 위의 (a, b)-평면의 곡선처럼 다항식의 근이 서로 겹치는 곳을 기술한다는 아이디어는 **판별식**(discriminant)으로 이어진다. 다항식과 그 근에 대해 더 읽고 싶다면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.