풀이

STEP I 2018, 문제 9

역학 • 경사면 위의 운동

STEP I 2018, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

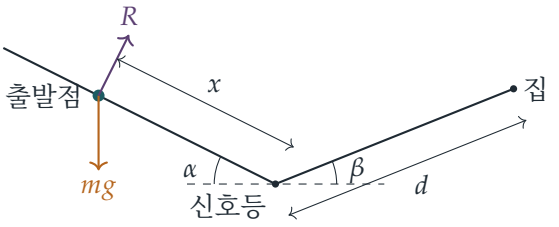
step.maths.org/questions/18-s1-q9

핵심 아이디어

저항이 없으므로 고카트(go-kart)는 각 직선 구간에서 일정한 가속도(acceleration)를 가진다. 첫 번째 비탈을 내려갈 때는 $g\sin\alpha$이고, 두 번째 비탈을 올라갈 때는 크기 $g\sin\beta$의 감속도(deceleration)이다. 따라서 각 구간은 등가속도 문제이고, 두 구간은 신호등에서의 속력으로 이어 붙여진다. 집에 도착할 수 있는지는 에너지(energy)(또는 $v^2 = u^2 + 2as$)로 판정하고, 시간은 각 구간에서 $s = ut + \frac{1}{2}at^2$로 구하며, 나머지는 k에 대한 꼼꼼한 대수 계산이다.

풀이

고카트와 탑승자를 각 직선 최대경사선(line of greatest slope)을 따라 움직이는 질점(particle)으로 모형화하고, 마찰이나 공기 저항은 없다고 한다. 작용하는 힘은 무게 mg와 수직항력(normal reaction) R뿐이며, 수직항력은 일을 하지 않는다.



집에 도착하기

첫 번째 비탈 방향으로 힘을 분해하면, 비탈 아래 방향의 무게 성분은 $mg\sin\alpha$이므로 가속도는 $g\sin\alpha$이다. 정지 상태에서 출발하여 거리 x만큼 이동하므로, 신호등에서의 속력 V는 다음을 만족한다.

$$V^2 = 2gx\sin\alpha.$$

속력이 갑자기 변하지 않으므로 두 번째 구간은 속력 V로 오르기 시작하고, 이제 무게는 비탈 방향으로 크기 $g\sin\beta$의 감속도를 준다. 신호등을 지나 거리 s인 지점에서 속력 v는 $v^2 = V^2 - 2gs\sin\beta$를 만족한다. 집에 도착하려면 $s = d$까지 줄곧 v^2이 음이 아니어야 한다. 즉

$$2gx\sin\alpha - 2gd\sin\beta \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x\sin\alpha \geq d\sin\beta,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다. (같은 말로, 에너지 보존(conservation of energy)에 의해 출발 높이보다 높이 올라갈 수 없는데, 출발점은 신호등보다 $x\sin\alpha$만큼 높고 집은 신호등보다 $d\sin\beta$만큼 높다.)

전체 시간

계산을 깔끔하게 하기 위해 $c = \left(\frac{1}{2}g\sin\alpha\right)^{1/2}$로 놓으면 $g\sin\alpha = 2c^2$이고, $\sin\beta = \sin\alpha/k$이므로 $g\sin\beta = 2c^2/k$이다.

첫 번째 구간. $x = \frac{1}{2}(g\sin\alpha)t_1^2 = c^2t_1^2$에서 신호등까지 걸리는 시간은 $t_1 = \sqrt{x}/c$이고, 그곳에서의 속력은 $V = (g\sin\alpha)t_1 = 2c\sqrt{x}$이다.

두 번째 구간. 신호등에서부터 s를 재면 $s = Vt - \frac{1}{2}(g\sin\beta)t^2$이므로, $s = d$에 도달하는 시간 t_2는 다음을 만족한다.

$$\frac{c^2}{k}\,t_2^2 - 2c\sqrt{x}\,t_2 + d = 0.$$

> **생각해 보기** 이 이차방정식(quadratic equation)은 근이 두 개이다. 어느 것이 도착하는 시각인가?

더 큰 근은 끝없이 긴 비탈 위의 질점이 멈춘 뒤 다시 내려오면서 $s = d$를 또 지나는 시각이다. 처음으로 $s = d$에 도달할 때 도착하므로, 작은 근을 택한다.

$$t_2 = \frac{2c\sqrt{x} - \sqrt{4c^2x - 4c^2d/k}}{2c^2/k} = \frac{k}{c}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x - \tfrac{d}{k}}\right) = \frac{1}{c}\left(k\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd}\right),$$

여기서 $k > 0$이므로 $k\sqrt{x - d/k} = \sqrt{k^2x - kd}$를 이용하였다. 제곱근이 실수가 되는 것은 바로 $x \geq d/k$이기 때문이며, 이는 앞부분의 조건 $x\sin\alpha \geq d\sin\beta$와 같다.

더하면 $T = t_1 + t_2$로부터

$$\left(\frac{g\sin\alpha}{2}\right)^{1/2} T = cT = (1+k)\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd},$$

를 얻고, 이것이 구하려던 결과이다.

T의 최소화

c는 양의 상수이므로 $x \geq d/k$에서 $f(x) = (1+k)\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd}$를 최소화하면 된다. 미분(differentiation)하면

$$f'(x) = \frac{1+k}{2\sqrt{x}} - \frac{k^2}{2\sqrt{k^2x - kd}}.$$

$f'(x) = 0$으로 놓으면 $(1+k)\sqrt{k^2x - kd} = k^2\sqrt{x}$이다. 양변이 모두 양수이므로 제곱해도 잃는 것이 없다.

$$\begin{aligned}(1+k)^2(k^2x - kd) &= k^4x \\ x\left[(1+k)^2k^2 - k^4\right] &= (1+k)^2kd \\ xk^2(1+2k) &= (1+k)^2kd,\end{aligned}$$

여기서 $(1+k)^2 - k^2 = 1 + 2k$를 이용하였다. $k^2(1+2k) > 0$으로 나누면

$$x = \frac{(1+k)^2}{k(1+2k)}\,d.$$

이것은 허용되는 출발점이다. $(1+k)^2 = 1 + 2k + k^2 > 1 + 2k$이므로 이 x는 d/k보다 엄밀히 크고, 따라서 집에 도착한다.

최적의 x가 존재하는 것은 자연스럽다. 너무 가까이서 출발하면 언덕의 마지막 구간을 기어가듯 오르게 되고, 너무 멀리서 출발하면 첫 번째 비탈에서 오랜 시간을 보내게 된다.

검산

- 최적점에서 $\sqrt{k^2x - kd} = k^2\sqrt{x}/(1+k)$이므로 $cT = \sqrt{x}\,\dfrac{1+2k}{1+k} = \sqrt{\dfrac{(1+2k)d}{k}}$이며, 기분 좋을 만큼 간단한 최소 시간이다.
- $\alpha = \beta$, 즉 $k = 1$로 두자. 그러면 최적점은 $x = \frac{4}{3}d$이고, 공식은 $cT = 2\sqrt{4d/3} - \sqrt{d/3} = \sqrt{3d}$를 주어 앞의 검산과 일치한다.
- 경계값 $x = d/k$에서는 문 앞까지 간신히 기어가게 되고 $f'(x) \to -\infty$이므로, 출발점을 조금 뒤로 옮기면 분명히 시간이 줄어든다.
- 여러 무작위 각도와 거리에 대해 작은 시간 간격으로 운동을 수치적으로 진행시켜 보았더니 T의 공식이 유효숫자 다섯 자리까지 재현되었고, 컴퓨터로 x를 탐색하니 위에서 구한 값에서 최솟값이 나타났다.

흔한 실수

- t_2에 대한 이차방정식에서 큰 근을 택하는 것. 그것은 다시 내려오면서 집을 지나치는 시각이다.
- 신호등에서의 속력은 주어지지 않았으므로 첫 번째 구간에서 넘겨받아야 한다는 것을 잊는 것.
- 조건 $x \geq d/k$를 빠뜨리는 것. 이 조건이 바로 $\sqrt{k^2x - kd}$를 실수로 만든다.

STEP 너머

최소 시간에 대한 깔끔한 답은 더 넓은 주제를 암시한다. 이동 시간을 최소화하도록 경로나 출발점을 고르는 문제는 **변분법**(calculus of variations)의 주제이며, 그 가장 유명한 문제인 최단강하선(brachistochrone) 문제는 중력 아래에서 가장 빨리 내려가는 곡선을 묻는다. 대학 1학년 역학에서는 보존력(conservative force)에 대해 에너지만으로 질점이 갈 수 있는 곳을 알 수 있지만, 시간을 구하려면 운동방정식(equation of motion)을 적분해야 한다는 생각도 만나게 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 생각을 모두 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.