풀이

STEP I 2018, 문제 8

순수수학 • 연립 미분방정식

> **STEP I 2018, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q8

핵심 아이디어

두 도함수(derivative) 규칙은 서로 상쇄되도록 만들어져 있다. s'이 나타날 때마다 c^2이 따라 들어오고, c'이 나타날 때마다 $-\mathrm{s}^2$이 따라 들어온다. 따라서 문제 전체에 걸쳐 자연스러운 방법은 곱과 몫을 미분하고 항들이 어떻게 합쳐지는지 지켜본 다음, (i)의 항등식(identity)을 이용해 모든 것을 하나의 함수로 바꾸는 것이다. 적분에서는 각 피적분함수(integrand)를 "무언가 곱하기 s^2" 또는 "무언가 곱하기 c^2"으로 읽어야 한다. 이것들이 바로 우리가 알고 있는 도함수이기 때문이다. 마지막 두 소문항의 u에 대한 적분은 사실 모습만 바꾼 같은 적분이다.

풀이

모호함이 없을 때에는 $\mathrm{s}(x)$와 $\mathrm{c}(x)$를 줄여서 s와 c로 쓴다.

소문항 (i)

연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{s}^3+\mathrm{c}^3\right)=3\mathrm{s}^2\,\mathrm{s}'+3\mathrm{c}^2\,\mathrm{c}'=3\mathrm{s}^2\mathrm{c}^2-3\mathrm{c}^2\mathrm{s}^2=0$$

이므로 $\mathrm{s}^3+\mathrm{c}^3$은 상수이다. $x=0$에서 그 값은 $0^3+1^3=1$이므로

$$\mathrm{s}(x)^3+\mathrm{c}(x)^3=1 \quad \text{모든} x$$

가 성립하고, 이것이 보이려던 것이다. 이 항등식은 문제의 나머지 부분을 움직이는 엔진이다. 이 식 덕분에 s^3을 $1-\mathrm{c}^3$으로, 또 그 반대로 바꿔 쓸 수 있다.

소문항 (ii)

곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sc}) = \mathrm{s}'\mathrm{c} + \mathrm{sc}' = \mathrm{c}^2 \cdot \mathrm{c} + \mathrm{s} \cdot (-\mathrm{s}^2) = \mathrm{c}^3 - \mathrm{s}^3.$$

(i)에 의해 $\mathrm{s}^3 = 1 - \mathrm{c}^3$이므로 이 값은 $\mathrm{c}^3 - (1 - \mathrm{c}^3) = 2\mathrm{c}^3 - 1$과 같고, 이것이 원하던 결과이다.

몫에 대해서는 ($\mathrm{c}(x) \neq 0$인 곳에서) 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{c}}\right) = \frac{\mathrm{s}'\mathrm{c} - \mathrm{sc}'}{\mathrm{c}^2} = \frac{\mathrm{c}^3 + \mathrm{s}^3}{\mathrm{c}^2} = \frac{1}{\mathrm{c}(x)^2}$$

이며, 여기서도 (i)을 이용했다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$와 멋지게 닮아 있다는 점에 주목하자.

소문항 (iii)

$\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$이므로 첫 번째 적분은 곧바로 얻어진다.

$$\int \mathrm{s}(x)^2 \,\mathrm{d}x = -\mathrm{c}(x) + C.$$

> **생각해 보기** 이미 알고 있는 도함수 $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$이 드러나도록 s^5을 어떻게 쓸 수 있을까?

인수 s^2을 떼어 내고 남은 부분에 (i)을 적용한다. $\mathrm{s}^5 = \mathrm{s}^3 \cdot \mathrm{s}^2 = (1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{s}^2 = -(1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{c}'$. 이것은 $g(\mathrm{c})\,\mathrm{c}'$ 꼴이므로 연쇄법칙을 거꾸로 적용하여 적분할 수 있다.

$$\int \mathrm{s}(x)^5 \,\mathrm{d}x = -\int (1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{c}' \,\mathrm{d}x = -\mathrm{c}(x) + \tfrac{1}{4}\mathrm{c}(x)^4 + C.$$

(다시 미분해 보면 $-\mathrm{c}' + \mathrm{c}^3\mathrm{c}' = -\mathrm{c}'(1 - \mathrm{c}^3) = \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{s}^3$이 되어 예상대로이다.)

소문항 (iv)

$u = \mathrm{s}(x)$로 놓으면 $x = \mathrm{s}^{-1}(u)$이고 $\mathrm{d}u = \mathrm{s}'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{c}(x)^2\,\mathrm{d}x$이다. (i)에서 $\mathrm{c}^3 = 1 - u^3$이므로 $\mathrm{c} = (1 - u^3)^{1/3}$이고(실수 세제곱근(cube root)을 택하며, 이는 c의 부호와 관계없이 성립한다), 따라서

$$(1 - u^3)^{2/3} = \mathrm{c}(x)^2.$$

그러므로

$$\int \frac{1}{(1 - u^3)^{2/3}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\mathrm{c}^2}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + C = \mathrm{s}^{-1}(u) + C$$

이고, 이것이 보여야 할 것이었다.

소문항 (v)

같은 치환(substitution)을 사용한다. 이때 $(1-u^3)^{1/3} = \mathrm{c}$이고 $\mathrm{d}u = \mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x$이다.

첫 번째 적분에서는 $(1-u^3)^{4/3} = \mathrm{c}^4$이므로, (ii)의 몫에 대한 결과에 의해

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^3)^{4/3}} = \int \frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{c}^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{c}^2} = \frac{\mathrm{s}(x)}{\mathrm{c}(x)} + C = \frac{u}{(1-u^3)^{1/3}} + C.$$

두 번째 적분은

$$\int (1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u = \int \mathrm{c}\cdot\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{c}^3\,\mathrm{d}x.$$

(ii)의 곱에 대한 결과에 따르면 $\mathrm{c}^3 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sc})\right)$이므로

$$\int \mathrm{c}^3\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(x + \mathrm{s}(x)\mathrm{c}(x)) + C.$$

$x = \mathrm{s}^{-1}(u)$, $\mathrm{sc} = u(1-u^3)^{1/3}$을 이용해 u로 되돌리면

$$\int (1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{s}^{-1}(u) + u(1-u^3)^{1/3}\right) + C.$$

검산

- (v)의 답은 u에 대해 미분하여 확인할 수 있다. 예를 들어

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\frac{u}{(1-u^3)^{1/3}} = \frac{1}{(1-u^3)^{1/3}} + \frac{u^3}{(1-u^3)^{4/3}} = \frac{1}{(1-u^3)^{4/3}}.$$

- 미분방정식(differential equation)을 $x = 1.2$까지 수치적으로 풀면 $\mathrm{s}(1.2) \approx 0.9411$, $\mathrm{c}(1.2) \approx 0.5500$을 얻고, 실제로 $0.9411^3 + 0.5500^3 \approx 1$이다. $U = \mathrm{s}(1.2)$로 두고 수치적분(numerical integration)을 하면 (iv)의 예측대로 $\int_0^U (1-u^3)^{-2/3}\,\mathrm{d}u \approx 1.2000$이고, $\int_0^U (1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u \approx 0.8588 = \frac{1}{2}(1.2 + 0.9411\times 0.5500)$이 되어 (v)와 일치한다.
- 수치적으로 $\int_0^{1.2} \mathrm{s}^2\,\mathrm{d}x \approx 0.4500 = 1 - \mathrm{c}(1.2)$이며, (iii)과 일치한다.

흔한 실수

- $\int \mathrm{s}^2\,\mathrm{d}x = +\mathrm{c} + C$로 쓰는 실수. $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$의 음의 부호는 빠뜨리기 쉽다.
- (iv)와 (v)에서 $\mathrm{d}u$를 $\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x$로 바꾸는 것을 잊거나, 최종 답을 u가 아니라 x로 나타낸 채 두는 실수.
- (v)에서 (ii)가 이미 c^3을 도함수와 상수의 합으로 나타내고 있다는 점을 알아채지 못하고 직접 적분하려 하는 실수.

STEP 너머

s, c 쌍은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 대신 곡선 $x^3 + y^3 = 1$에 대한 sin과 cos처럼 행동한다. 이러한 "일반화된 삼각함수(generalised trigonometric functions)"는 타원함수(elliptic functions)의 가까운 친척이다. 타원함수는 $\sin^{-1} u = \int (1 - u^2)^{-1/2} \, \mathrm{d}u$인 것과 마찬가지로, (iv)에 나온 것과 같은 적분의 역함수를 취하여 얻어진다. 함수를 초기조건(initial conditions)이 주어진 미분방정식으로 정의하고 그 성질을 모두 미분방정식에서 이끌어 내는 것은 대학 1학년에서 배우는 표준적인 기법이며, 함수가 "유일하게 정의된다"는 가정은 상미분방정식(ODE)의 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)에 해당한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 이론과 함께 연립계(coupled systems)의 많은 예를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.