풀이

STEP I 2018, 문제 7

순수수학 • 삼차방정식의 해법

> **STEP I 2018, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q7

핵심 아이디어

이 치환은 분모를 없앤 뒤 z^2 항과 z 항이 소거되어 z^3 항과 상수항만 남도록 고른 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이다. $az^3+b=0$ 꼴의 삼차방정식(cubic equation)은 풀기 쉬우므로, 결국 할 일은 일반적인 축약된 삼차방정식 $x^3-3cx+d=0$을 이 특별한 꼴로 바꾸는 것이다. 그러려면 두 수를 그 합과 곱으로부터 구해야 하는데, 이는 이차방정식을 푸는 일이고, 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근(real root)을 가질 조건에서 $d^2>4c^3$이 나온다.

풀이

소문항 (i)

$x=\dfrac{pz+q}{z+1}$를 대입하고 방정식 양변에 $(z+1)^3$을 곱한다.

$$(pz+q)^3-3pq(pz+q)(z+1)^2+pq(p+q)(z+1)^3=0.$$

$(pz+q)(z+1)^2=pz^3+(2p+q)z^2+(p+2q)z+q$가 필요하다. 이제 z의 거듭제곱별로 항을 모은다.

$$\begin{aligned}
z^3:&\quad p^3-3p^2q+p^2q+pq^2=p(p^2-2pq+q^2)=p(p-q)^2,\\
z^2:&\quad 3p^2q-3pq(2p+q)+3pq(p+q)=3p^2q-6p^2q-3pq^2+3p^2q+3pq^2=0,\\
z^1:&\quad 3pq^2-3pq(p+2q)+3pq(p+q)=3pq^2-3p^2q-6pq^2+3p^2q+3pq^2=0,\\
z^0:&\quad q^3-3pq^2+p^2q+pq^2=q(q^2-2pq+p^2)=q(p-q)^2.
\end{aligned}$$

따라서 방정식은 $az^3+b=0$으로 정리되고, 이때

$$a=p(p-q)^2,\qquad b=q(p-q)^2.$$

$p \neq q$이므로 $(p-q)^2$으로 나눌 수 있고, 더 간단한 꼴 $pz^3 + q = 0$을 얻는다.

이 치환은 $x \neq p$인 모든 경우에 $z = \dfrac{x-q}{p-x}$로 역변환할 수 있고, $x = p$가 삼차방정식의 근이 되는 것은 $p(p-q)^2 = 0$일 때뿐이다. 또한 $z = -1$은 결코 $pz^3 + q = 0$의 해가 되지 않는데, 그러려면 $p = q$여야 하기 때문이다. 따라서 삼차방정식의 근은 $pz^3 + q = 0$의 근과 정확히 일대일로 대응한다($p = 0$이면 삼차방정식은 그냥 $x^3 = 0$이다).

소문항 (ii)

$x^3 - 3cx + d$와 $x^3 - 3pqx + pq(p+q)$를 비교하면

$$pq = c, \qquad pq(p+q) = d, \qquad \text{즉} \qquad pq = c, \quad p+q = \frac{d}{c},$$

이어야 하며, $c \neq 0$이므로 c로 나누어도 된다. 합이 $\frac{d}{c}$이고 곱이 c인 두 수는

$$t^2 - \frac{d}{c}\,t + c = 0.$$

의 두 근이다. 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 필요충분조건은 판별식(discriminant)이 양수인 것이다.

$$\frac{d^2}{c^2} - 4c > 0 \iff d^2 > 4c^3,$$

여기서 $c^2 > 0$을 곱하였다. 따라서 $d^2 > 4c^3$이면 p와 q를 이 이차방정식의 두 근으로 잡아 주어진 방정식을 원하는 꼴로 쓸 수 있고, 이때 p, q는 서로 다른 실수이다.

소문항 (iii)

여기서는 $c = -2, d = -2$이므로 $d^2 = 4 > -32 = 4c^3$이고, 소문항 (ii)를 적용할 수 있다. $p+q = \frac{d}{c} = 1$, $pq = c = -2$이어야 하므로 p, q는 $t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1) = 0$의 두 근이다. $p = 2, q = -1$로 잡자. 소문항 (i)에 의해 방정식은

$$2z^3 - 1 = 0, \qquad z^3 = \tfrac{1}{2},$$

이 되고, 이 방정식의 유일한 실근은 $z = 2^{-1/3}$이다. $u = 2^{1/3}$으로 놓으면 $z = \frac{1}{u}$이다. 그러면

$$x = \frac{2z-1}{z+1} = \frac{2-u}{1+u}.$$

> **생각해 보기** 분모에 세제곱근이 들어 있는데, 이 식을 더 깔끔하게 정리할 수 있을까?

할 수 있다. $1 + u^3 = (1+u)(1-u+u^2)$을 이용해 유리화(rationalise)하는데, $u^3 = 2$이므로 이 값은 3이다.

$$x = \frac{(2-u)(1-u+u^2)}{3} = \frac{2-3u+3u^2-u^3}{3} = \frac{3u^2-3u}{3} = u^2 - u.$$

따라서 실근은

$$x = 2^{2/3} - 2^{1/3} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}.$$

이것이 유일한 실근이다. $x^3 + 6x - 2$의 도함수(derivative)는 $3x^2 + 6 > 0$이므로 이 함수는 순증가한다. 나머지 두 z 값은 복소수이고, 두 복소근을 준다. (대신 $p = -1, q = 2$로 잡으면 $z^3 = 2$가 되고 같은 근을 얻는다.)

소문항 (iv)

$x = p$를 대입하면 $p^3 - 3p^3 + 2p^3 = 0$이므로 $x - p$는 인수이고,

$$x^3 - 3p^2x + 2p^3 = (x - p)(x^2 + px - 2p^2) = (x - p)^2(x + 2p).$$

따라서 근은 $x = p$(중근(repeated root))와 $x = -2p$이다.

이것은 소문항 (i)의 꼴에서 $q = p$인 경우로, 바로 소문항 (ii)에서 제외했던 경우임에 주목하자. 이제 $c, d \neq 0$이고 $d^2 = 4c^3$이라 하자. 그러면 $c^3 = \frac{1}{4}d^2 > 0$이므로 $c > 0$이다. $p^2 = c$이고 $2p^3 = d$인 p를 찾는다. 두 번째 식을 첫 번째 식으로 나누어 보면

$$p = \frac{d}{2c},$$

를 짐작할 수 있고, 실제로 성립한다. $p^2 = \dfrac{d^2}{4c^2} = \dfrac{4c^3}{4c^2} = c$이고, 따라서 $2p^3 = 2p \cdot p^2 = 2 \cdot \dfrac{d}{2c} \cdot c = d$이다. 그러므로 $x^3 - 3cx + d = x^3 - 3p^2x + 2p^3$이고, 그 근은

$$x = \frac{d}{2c} \text{ (중근)} \qquad \text{과} \qquad x = -\frac{d}{c}.$$

검산

- 소문항 (iii): $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \approx 0.32748$이고, 이 값에서 $x^3 + 6x - 2$는 소수점 아래 열다섯째 자리까지 0이다. 카르다노(Cardano)의 공식도 같은 근 $\sqrt[3]{1+3} + \sqrt[3]{1-3}$을 준다.
- 소문항 (iv): $c = 1, d = 2$이면 삼차방정식은 $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$이고, 이는 중근 $\frac{d}{2c} = 1$, 단근 $-\frac{d}{c} = -2$와 일치한다.
- 소문항 (i): $p = 1, q = 0$이면 삼차방정식은 $x^3 = 0$이고 치환은 $x = \frac{z}{z+1}$이 되므로 $x^3(z + 1)^3 = z^3$이며, 이는 $a = 1, b = 0$과 일치한다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 c가 음수일 수 있음을 잊는 것. 부등식에 c^2을 곱하는 것은 안전하지만, c를 곱하는 것은 그렇지 않다.

- 소문항 (iii)에서 $\frac{1}{2}$의 세제곱근 세 개를 모두 실근으로 답하는 것. 실수인 것은 $z = 2^{-1/3}$뿐이다.
- 소문항 (iv)에서 $p = \sqrt{c}$로 잡는 것. 이는 $d < 0$일 때 부호가 틀린다. $p = \frac{d}{2c}$로 잡으면 부호가 자동으로 맞는다.

STEP 너머

이것은 삼차방정식에 대한 카르다노의 공식에 이르는 깔끔한 길이다. 이차방정식 $t^2 - \frac{d}{c}t + c = 0$은 "분해식(resolvent)" 역할을 하고, $d^2 - 4c^3$의 부호는 (상수배를 제외하면) 삼차방정식의 판별식으로, 삼차방정식이 실근을 하나 가지는지 세 개 가지는지를 결정한다. 삼차방정식과 사차방정식(quartic)은 거듭제곱근(radicals)으로 풀 수 있는데 일반적인 오차방정식(quintic)은 왜 그럴 수 없는지를 다루는 것이 갈루아 이론(Galois theory)이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이에 대해 읽기 시작하기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.