풀이

STEP I 2018, 문제 6

순수수학 • 중점 공식과 사다리꼴 공식

> **STEP I 2018, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q6

핵심 아이디어

두 근삿값은 모두 같은 간격으로 놓인 각들의 사인의 합이며, 주어진 곱을 합으로 바꾸는 항등식(product-to-sum identity)을 쓰면 이런 합에 적절히 고른 $2\sin\theta$를 곱했을 때 망원합(telescoping sum)이 된다. 중점 규칙(midpoint rule)은 $\frac{\pi}{2n}$의 홀수 배에서, 사다리꼴 공식(trapezium rule)은 짝수 배에서 함숫값을 취하므로, $\theta = \frac{\pi}{2n}$으로 두면 각 소문항이 망원합이 된다. A_n과 B_n을 닫힌 형태(closed form)로 구하고 나면, 소문항 (iii)은 반각 공식(half-angle formula)만으로 해결된다.

풀이

예비 항등식

항등식에서 $P = \theta$, $Q = (2k-1)\theta$로 두면

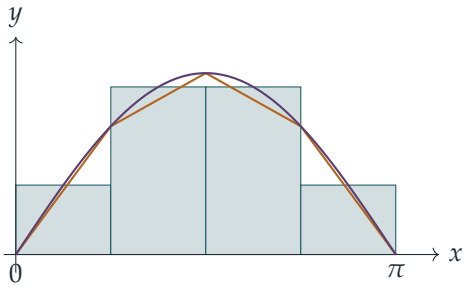
$$2\sin\theta\,\sin(2k-1)\theta = \cos(2k-2)\theta - \cos 2k\theta.$$

$k = 1$부터 $k = n$까지 더하면, 한 항에서 빼진 각 $\cos 2k\theta$가 다음 항에서 다시 더해지므로 합이 망원합으로 줄어든다.

$$\begin{aligned} 2\sin\theta\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\theta &= (\cos 0 - \cos 2\theta) + (\cos 2\theta - \cos 4\theta) + \cdots \\ &\quad + (\cos(2n-2)\theta - \cos 2n\theta) \\ &= 1 - \cos 2n\theta, \end{aligned}$$

따라서 원하는 결과를 얻는다.

이후로는 띠의 폭을 $h = \frac{\pi}{n}$으로, $\theta = \frac{\pi}{2n} = \frac{h}{2}$로 쓴다.



$n = 4$일 때: $\sin x$는 $[0, \pi]$에서 위로 볼록(concave)하므로, 중점 직사각형(음영)은 넓이를 과대평가하고 사다리꼴의 현(굵은 선)은 넓이를 과소평가한다.

소문항 (i)

k번째 띠는 $(k-1)h$부터 kh까지이므로, 그 중점은 $x = (k - \frac{1}{2})h = (2k-1)\theta$에 있고 높이는 $\sin(2k-1)\theta$이다. 따라서

$$A_n = h \sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)\theta.$$

$2\sin\theta$를 곱하고 $2n\theta = \pi$와 함께 항등식을 쓰면

$$2\sin\theta\, A_n = h\,(1 - \cos\pi) = 2h.$$

양변을 2로 나누면 $A_n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}$이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

세로좌표(ordinate)는 $k = 0, 1, \ldots, n$에 대하여 $x = kh = 2k\theta$에서 취하며, 양 끝의 세로좌표는 $\sin 0 = \sin\pi = 0$이다. 따라서 사다리꼴 공식은 다음을 준다.

$$B_n = \frac{h}{2}\left(\sin 0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta + \sin\pi\right) = h \sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta.$$

이번에는 θ의 짝수 배이므로, 항등식을 한 번 더 쓰되 이번에는 $P = \theta$, $Q = 2k\theta$로 둔다.

$$2\sin\theta\, \sin 2k\theta = \cos(2k-1)\theta - \cos(2k+1)\theta.$$

$k = 1$부터 $n-1$까지 더하면 다시 망원합이 된다.

$$2\sin\theta \sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta = \cos\theta - \cos(2n-1)\theta.$$

? 생각해 보기 $\cos(2n-1)\theta$를 어떻게 간단히 할까?

$2n\theta = \pi$이므로 $(2n-1)\theta = \pi - \theta$이고, $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$이다. 따라서 우변은 $2\cos\theta$이고

$$2\sin\theta\, B_n = 2h\cos\theta, \qquad \text{즉,} \qquad B_n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

($n=1$일 때는 합이 비어 있어 $B_1 = 0$이지만, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$이므로 이 공식은 여전히 성립한다.)

소문항 (iii)

$0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta \neq 0$이고, 따라서 소문항 (i)과 (ii)에서

$$A_n = \frac{h}{\sin\theta}, \qquad B_n = \frac{h\cos\theta}{\sin\theta}.$$

n을 $2n$으로 바꾸면 h와 θ가 모두 절반이 된다.

$$A_{2n} = \frac{h/2}{\sin(\theta/2)}, \qquad B_{2n} = \frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

첫 번째 결과는 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$와 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$를 써서 얻는다.

$$\tfrac{1}{2}(A_n + B_n) = \frac{h}{2}\cdot\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{h}{2}\cdot\frac{2\cos^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = \frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = B_{2n}.$$

두 번째 결과는 $\sin\theta$에 대한 같은 배각 공식(double-angle formula)을 쓰면(그리고 $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$이므로)

$$A_n B_{2n} = \frac{h}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\cdot\frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{h^2}{4\sin^2(\theta/2)} = \left(\frac{h/2}{\sin(\theta/2)}\right)^2 = A_{2n}^2.$$

이로써 두 결과가 모두 증명되었다.

검산

- $n=1$: 폭이 π이고 높이가 $\sin\frac{\pi}{2} = 1$인 중점 직사각형 하나에서 $A_1 = \pi$를 얻으며, 이는 $\pi/\sin\frac{\pi}{2}$와 일치한다. 또한 앞에서 말했듯이 $B_1 = 0$이다.
- $n=2$: $A_2 = \frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2.2214$이고 $B_2 = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$이다. 그러면 $\frac{1}{2}(A_1+B_1) = \frac{\pi}{2} = B_2$이고 $A_1 B_2 = \frac{\pi^2}{2} = A_2^2$이다.
- $n=10$: 직접 더하면 $A_{10} \approx 2.00825$, $B_{10} \approx 1.98352$로, 참값인 넓이 2의 양쪽에 놓인다. $n\to\infty$일 때 $\frac{\pi}{n}/\sin\frac{\pi}{2n} \to 2$이고 $\cos\frac{\pi}{2n} \to 1$이므로, 둘 다 마땅히 2로 수렴한다. 네 결과 모두 200 이하의 모든 n에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 중점을 $(k-\frac{1}{2})h$가 아니라 kh에 두는 것. 이렇게 하면 중점 규칙이 사다리꼴 공식의 마디점에서의 합으로 바뀌어 버린다.
- 사다리꼴 공식에서 양 끝 세로좌표에 절반의 가중치가 붙는다는 것을 잊는 것. 이 문제에서는 양 끝 값이 0이므로, B_n은 단순히 내부 세로좌표들의 합에 h를 곱한 것이 된다.
- $(2n-1)\theta = \pi - \theta$를 쓰지 않고 $\cos(2n-1)\theta$를 간단히 하지 않은 채 두는 것.

STEP 너머

소문항 (iii)은 B_{2n}이 A_n과 B_n의 산술평균(arithmetic mean)이고, A_{2n}이 A_n과 B_{2n}의 기하평균(geometric mean)임을 말해 준다. 역수를 취하면 이것은 원의 바깥과 안쪽에 그린 다각형 사이에 π를 끼워 넣는 아르키메데스(Archimedes)의 방법에 나오는 "조화평균(harmonic mean) 다음에 기하평균" 패턴이 되며, 이 반복 과정은 Borchardt 알고리즘(Borchardt's algorithm)으로 알려져 있다. 더 일반적으로, 중점 규칙과 사다리꼴 공식의 오차를 비교하면(중점 규칙의 오차는 사다리꼴 공식 오차의 약 절반이며 부호가 반대이다) 심프슨 공식(Simpson's rule)과 리처드슨 외삽법(Richardson extrapolation)에 이르게 되는데, 이는 수치해석(numerical analysis)의 핵심 아이디어이다. 이러한 규칙들의 오차 분석에 대해서는 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석 입문)에서 리만 적분(Riemann integral)을 다루는 부분을 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.