풀이

STEP I 2018, 문제 5

순수수학 • 다항식과 인수정리

> **STEP I 2018, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q5

핵심 아이디어

"이 점들에서 값 1을 가진다"는 말은 사실 근(root)에 관한 진술이다. $P(k) = 1$이면 k는 $P(x) - 1$의 근이므로, $x - k$는 그 인수(factor)이다. 공통된 값을 빼고 인수분해(factorise)하면 이 문제의 모든 소문항이 쉬워진다. 소문항 (iii)에서는 인수분해 덕분에 S에 관한 질문이 작은 수를 네 개의 **서로 다른** 정수의 곱으로 나타내는 문제로 바뀌며, 모든 일을 해내는 것은 바로 서로 다르다는 조건이다.

풀이

소문항 (i)

나머지 정리(remainder theorem)에 의해 $P(x)$를 $x - k$로 나눈 나머지는 $P(k)$이다. 따라서 $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 1$, 즉 $1, 2, 3, 4$가 $P(x) - 1$의 근이어야 한다. $P(x) - 1$은 차수(degree)가 4 이하이고 이 서로 다른 네 근을 가지므로 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$의 상수배이다. 따라서 그러한 다항식 가운데 가장 일반적인 것은

$$P(x) = 1 + k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4), \qquad k \neq 0,$$

이고, 여기서 차수가 정확히 4가 되려면 $k \neq 0$이어야 한다.

소문항 (ii)

소문항 (i)과 똑같이, $1, 2, \ldots, N$은 차수가 N인 $P(x) - 1$의 서로 다른 N개의 근이다($N \geq 1$이므로 1을 빼도 차수는 변하지 않는다). 따라서 어떤 상수 k에 대해

$$P(x) - 1 = k(x-1)(x-2)\cdots(x-N)$$

이고, P의 차수가 $N \geq 1$이므로 $k \neq 0$이다. 그러면

$$P(N+1) - 1 = k \cdot N(N-1) \cdots 1 = k\,N! \neq 0,$$

이다. k와 $N!$이 모두 0이 아니기 때문이다. 따라서 $P(N+1) \neq 1$이다.

$P(N+1) = 2$이면 $k\,N! = 1$이므로 $k = \frac{1}{N!}$이다. 양의 정수 r에 대해

$$\begin{aligned} P(N+r) &= 1 + \frac{(N+r-1)(N+r-2)\cdots r}{N!} \\ &= 1 + \frac{(N+r-1)!}{(r-1)!\,N!} = 1 + \binom{N+r-1}{N}. \end{aligned}$$

(이 곱은 $N+r-1$부터 r까지 내려가는 N개의 인수로 이루어진다.)

이제 모든 N에 대해 $1 + \binom{N+r-1}{N} = N + r$이 되기를 원한다. 작은 r부터 시도해 보자. $r = 1$이면 $P(N+1) = 2$이고, 이것은 $N = 1$일 때만 $N + 1$과 같다. $r = 2$이면

$$P(N+2) = 1 + \binom{N+1}{N} = 1 + (N+1) = N + 2,$$

이므로 $r = 2$는 N에 관계없이 성립한다.

소문항 (iii)

서로 다른 네 정수 a, b, c, d는 차수가 4이고 최고차항 계수(leading coefficient)가 1인 $S(x) - 2001$의 근이다. 따라서

$$S(x) = 2001 + (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

(a) 어떤 정수 e에 대해 $S(e) = 2018$이라고 가정하자. 그러면

$$(e-a)(e-b)(e-c)(e-d) = 17.$$

네 인수는 정수이고, a, b, c, d가 서로 다르므로 이들도 서로 다르다. 곱이 0이 아니므로 어느 인수도 0이 될 수 없다.

> **생각해 보기** 서로 다른 네 정수의 곱이 어떻게 소수(prime)가 될 수 없는 것일까?

0이 아닌 서로 다른 정수 가운데 절댓값(absolute value)이 1인 것은 많아야 두 개(즉 1과 -1)이다. 따라서 네 인수 중 적어도 두 개는 절댓값이 2 이상이고, 그 두 수의 곱은 절댓값이 4 이상이다. 그런데 그 곱은 17의 약수(divisor)이므로 ± 17이어야 한다. 17은 소수이므로 절댓값이 각각 2 이상인 두 정수의 곱으로 나타낼 수 없다. 이 모순으로부터 $S(e) = 2018$을 만족하는 정수 e는 존재하지 않는다.

(b) 이제 $S(0) = 2001 + (-a)(-b)(-c)(-d) = 2001 + abcd$이므로, $S(0) = 2017$이 되는 것은 정확히

$$abcd = 16.$$

일 때이다. 역으로, $abcd = 16$인 서로 다른 네 정수는 모두 조건에 맞는 S를 준다(위의 식은 정수 계수의 일계수 다항식(monic polynomial)이다). 따라서 곱이 16인 서로 다른 네 정수의 집합 $\{a, b, c, d\}$의 개수를 세면 된다. 각 집합은 오름차순으로 나열하는 방법이 정확히 한 가지이다.

a, b, c, d는 각각 16의 약수이므로 그 절댓값은 $1, 2, 4, 8, 16$ 중 하나이고, 네 절댓값의 곱은 16이다. 정수들이 서로 다르므로 각 절댓값은 ($\pm m$의 꼴로) 최대 두 번까지만 나타날 수 있다. 절댓값을 거듭제곱 2^p 꼴로 쓰면 네 지수의 합은 4이고 어떤 지수도 두 번보다 많이 쓰이지 않으므로, 가능한 경우는

$$\{1, 1, 2, 8\}, \qquad \{1, 1, 4, 4\}, \qquad \{1, 2, 2, 4\}.$$

이다. (16을 쓰면 나머지 셋이 1, 1, 1이 되어야 하는데 이는 허용되지 않으며, $\{2, 2, 2, 2\}$는 2를 네 번 쓴다.) 이제 곱이 $+16$이 되도록 부호를 정한다.

- $\{1, 1, 2, 8\}$: 짝은 $1, -1$이고 -1을 기여하므로, $2, 8$ 중 정확히 하나가 음수이다. 이로부터 $\{-2, -1, 1, 8\}$과 $\{-8, -1, 1, 2\}$를 얻는다.
- $\{1, 1, 4, 4\}$: 두 짝 모두 $\pm$ 꼴이고, $(1)(-1)(4)(-4) = 16$이다. 이로부터 $\{-4, -1, 1, 4\}$를 얻는다.
- $\{1, 2, 2, 4\}$: 짝 $2, -2$가 -4를 기여하므로, $1, 4$ 중 정확히 하나가 음수이다. 이로부터 $\{-4, -2, 1, 2\}$와 $\{-2, -1, 2, 4\}$를 얻는다.

따라서 $a < b < c < d$를 고르는 방법은 **5**가지이다.

검산

- 소문항 (ii)에서 $N = 1$이면 $P(x) = x$이므로 $P(N + r) = 1 + r$은 $1 + \binom{r}{1}$과 일치하고, $P(3) = 3$이다. $N = 2$이면 $P(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2)$에서 $P(4) = 4$이며, 이는 $r = 2$에 대한 주장과 같다.
- (iii)(b)에서는 다섯 집합 각각을 곱해 본다. 예를 들어 $(-2)(-1)(2)(4) = 16$이다. $[-16, 16]$에 속하는 서로 다른 정수로 이루어진 모든 네 수의 조를 컴퓨터로 탐색하면 정확히 이 다섯 개가 나온다.
- (iii)(a)에서는 $2018 - 2001 = 17$이 소수라는 점에 주목하자. 2001을 다른 값으로 바꾸어 차가 $4 = (-2)(-1)(1)(2)$와 같은 수가 되면 그러한 e가 존재할 수 있으므로, 소수라는 성질이 정말로 중요하다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $k \neq 0$을 빠뜨리거나, $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 1$만 쓰는 것. 이것은 가장 일반적인 다항식이 아니다.
- 소문항 (iii)(b)에서 양의 약수만 세거나, 1과 -1을 둘 다 쓸 수 있다는 것을 잊는 것.
- $S(0) = 2001 - abcd$라고 쓰는 것. 음의 부호가 네 개이므로 곱은 $+abcd$이다.

STEP 너머

차수가 N인 다항식이 $N+1$개의 점에서의 값으로 결정된다는 생각은 라그랑주(Lagrange) 보간법(interpolation)과 유한 차분(finite differences)의 바탕이 된다. 소문항 (ii)는 사실 다항식 $1 + \binom{x-1}{N}$이 모습을 바꾼 것이다. 소문항 (iii)은 정수론(number theory)의 표준적인 도구를 보여 주는 작은 예이다. P의 계수가 정수이면 $m-n$은 $P(m) - P(n)$을 나누며, 이 때문에 다항식이 정수에서 가질 수 있는 값은 크게 제한된다. 이런 종류의 나누어떨어짐 논증에 대해 더 읽어 보려면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)이 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.