풀이

# STEP I 2018, 문제 4

순수수학 • 적분으로 정의된 함수의 그래프 그리기

> **STEP I 2018, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q4

## 핵심 아이디어

f의 모든 부분은 $\ln x$로 이루어져 있고, 거추장스러운 인수 $\frac{1}{x}$는 정확히 $\ln x$의 도함수이다. 따라서 치환(substitution) $u = \ln x$를 하면 적분이 $u$에 대한 간단한 유리함수(rational function)의 적분으로 바뀐다. $u$로 나타내면 $x$를 $x^{-1}$로 바꾸는 것은 $u$의 부호를 바꾸는 것일 뿐이므로, 대칭성(symmetry)은 결국 답이 $u$에 대한 우함수(even function)라는 사실로 귀결된다.

## 풀이

이 풀이 전체에서 $u = \ln x$로 둔다. $x \neq 1$이므로 $u \neq 0$이고, $u > 0$인 것은 정확히 $x > 1$일 때이다.

### f와 f′의 영점

다음과 같이 두자.

$$g(u) = \frac{(1-u^2)^2}{u} = \frac{1}{u} - 2u + u^3, \qquad \text{이고} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{g(\ln x)}{x}.$$

$(\ln x)^2 = 1$이면 인수 $(1-u^2)^2$이 0이므로 $\mathrm{f}(x) = 0$이다. 몫의 미분법(quotient rule)과 연쇄 법칙(chain rule)에 의해

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{g'(u) \cdot \frac{1}{x} \cdot x - g(u)}{x^2} = \frac{g'(u) - g(u)}{x^2}.$$

이미 $g(\pm 1) = 0$임을 알고 있다. 또한 $(1-u^2)^2 = (1-u)^2(1+u)^2$은 $u = \pm 1$에서 **중복** 인수(repeated factor)를 가지므로, 그 도함수 $-4u(1-u^2)$도 그곳에서 0이 되고, 따라서

$$g'(u) = \frac{-4u(1-u^2)\cdot u - (1-u^2)^2}{u^2} = 0 \quad \text{단, } u = \pm 1.$$

그러므로 $(\ln x)^2 = 1$일 때, 즉 $x = e$와 $x = e^{-1}$에서 $\mathrm{f}'(x) = 0$도 성립한다.

**소문항 (i)**

$u = \ln t$로 치환하면 $\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$이다. 그러면

$$\int \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{(1-u^2)^2}{u}\,\mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right)\mathrm{d}u = \ln|u| - u^2 + \tfrac{1}{4}u^4 + C.$$

$G(u) = \ln|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4$로 정의하자. F의 두 부분 모두 적분 구간이 $t = 1$을 넘어가지 않으므로, 각 부분에서 $u$의 부호는 일정하고 이 원시함수(antiderivative)는 그곳에서 유효하다.

$x > 1$일 때 아래끝 $t = e$는 $u = 1$에 대응하고 $G(1) = 0 - 1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$이다. $0 < x < 1$일 때 아래끝 $t = e^{-1}$은 $u = -1$에 대응하고 역시 $G(-1) = -\frac{3}{4}$이다. 따라서 두 경우 모두 같은 식을 얻는다.

$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \ln|\ln x| - (\ln x)^2 + \tfrac{1}{4}(\ln x)^4 + \tfrac{3}{4} \qquad (x > 0,\ x \neq 1).}$$

이제 $\ln(x^{-1}) = -\ln x$이다. 위 식에서 $\ln x$는 모두 $|\cdot|$ 안에 있거나 짝수 거듭제곱으로 나타나므로

$$\mathrm{F}(x^{-1}) = \ln|-\ln x| - (-\ln x)^2 + \tfrac{1}{4}(-\ln x)^4 + \tfrac{3}{4} = \mathrm{F}(x),$$

이고, 이것이 보이고자 한 것이다. (상수 $\frac{3}{4}$가 양쪽에서 같은 것은 오직 두 아래끝 $e$와 $e^{-1}$ 자체가 서로 역수 관계이기 때문이다.)

**소문항 (ii)**

**?** **생각해 보기** F는 어디에서 증가하며, $x = 1$ 근처에서는 어떤 일이 일어나는가?

**기울기(gradient).** $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x)$이다. 인수 $(1-u^2)^2$은 결코 음이 아니고 $x > 0$이므로, $\mathrm{f}(x)$의 부호는 $u = \ln x$의 부호와 같다. 따라서 F는 $(0,1)$에서 감소하고 $(1,\infty)$에서 증가한다. 정상점(stationary point)은 $x = e^{-1}$과 $x = e$뿐이며, 정의에 의해 그곳에서 $\mathrm{F} = 0$이다.

이 점들은 극점(turning point)이 아니다. $x = e$ 근처에서는 양쪽 모두 기울기가 양이고, $x = e^{-1}$ 근처에서는 양쪽 모두 기울기가 음이다. 그곳에서 $\mathrm{f}' = \mathrm{F}''$도 0이므로, 이 점들은 **정상 변곡점**(*stationary point of inflection*)이다. 따라서 다음이 성립한다.

$\mathrm{F}(x) > 0$, 구간: $0 < x < e^{-1}$ 또는$x > e$, $\qquad$ $\mathrm{F}(x) < 0$, 구간: $e^{-1} < x < 1$ 또는$1 < x < e$.

**양 끝에서의 행동.**

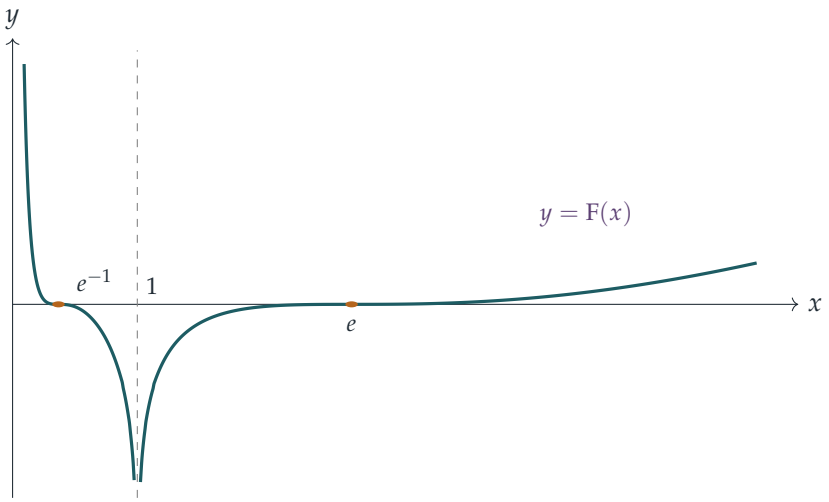
- $x \to 1$이면 $u \to 0$이고 $\ln|u| \to -\infty$인 반면, 나머지 항들은 $\frac{3}{4}$로 수렴한다. 따라서 양쪽에서 $\mathrm{F}(x) \to -\infty$이고, $x = 1$은 수직 점근선(vertical asymptote)이다.
- $x \to \infty$이면 $u \to \infty$이고 $\frac{1}{4}u^4$ 항이 지배하므로 $\mathrm{F}(x) \to \infty$이다. 다만 매우 천천히 증가한다. 기울기 $\mathrm{f}(x) \approx u^3/x \to 0$이기 때문이다.
- $x \to 0^+$이면 $u \to -\infty$이므로, 대칭성에 의해 역시 $\mathrm{F}(x) \to \infty$이다. 이번에는 가파르게 증가한다. 기울기 $\mathrm{f}(x) \approx u^3/x \to -\infty$이기 때문이다. 곡선은 $y$축과 만나지 않는다.

**오목과 볼록(더 정밀한 개형을 위해).** $\mathrm{F}'' = \mathrm{f}' = (g' - g)/x^2$을 이용하여 정리하면

$$\mathrm{F}''(x) = -\frac{(u^2-1)(u^3-3u^2-u-1)}{u^2x^2}.$$

삼차식 $u^3 - 3u^2 - u - 1$은 $u \approx 3.38$에서 단 하나의 실근을 갖는다($u = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$에서의 극댓값이 음이기 때문이다). 이보다 작은 모든 $u$에 대해 이 삼차식은 음이다. 따라서 곡선은 $(0, e^{-1})$에서 아래로 볼록(concave up)이고, $(e^{-1}, 1)$과 $(1, e)$에서 위로 볼록(concave down)이다. $e$부터 $x \approx 29.5$에 있는 또 하나의 변곡점까지는 아래로 볼록이고, 그 이후로는 위로 볼록이다. 이 마지막 변곡점은 훨씬 오른쪽에 있으므로 개형에 나타낼 필요는 없다.

대칭성 $\mathrm{F}(x^{-1}) = \mathrm{F}(x)$는 $x$에서의 높이가 $1/x$에서의 높이와 같다는 뜻이다. 예를 들어 $\mathrm{F}(2) = \mathrm{F}(\frac{1}{2}) \approx -0.04$이고 $\mathrm{F}(5) = \mathrm{F}(\frac{1}{5}) \approx 0.31$이다. 따라서 $(1, \infty)$에서의 곡선은 $(0, 1)$에서의 곡선을 점근선 쪽으로 가로 방향으로 눌러 놓은 모양이다.




곡선은 $y$축 근처의 $+\infty$에서 가파르게 내려온다. $(e^{-1}, 0)$의 정상 변곡점에서 평평해지며 $x$축에 닿은 뒤, 점근선 $x = 1$에서 $-\infty$로 곤두박질친다. 오른쪽에서는 $-\infty$에서 다시 올라와 $(e, 0)$의 두 번째 정상 변곡점에서 평평해지고, 그다음 $+\infty$로 천천히 올라간다.

## 검산

- 상자 안의 식을 미분하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right) = \mathrm{f}(x)$이고, 이 식은 $x = e$와 $x = e^{-1}$에서 0이 된다.
- 수치적으로 $\int_e^5 \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.3130$이고 $\int_{1/e}^{1/5} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.3130$이므로, 식과 대칭성 모두와 일치한다.
- 부호도 맞는다. $(1, e)$에서 함수는 0까지 증가하므로 그곳에서는 음이어야 하고, 실제로 $\mathrm{F}(2) \approx -0.039$이다.

## 흔한 실수

- $\ln x < 0$인 $0 < x < 1$에서 $\ln(\ln x)$라고 쓰는 것. $\frac{1}{u}$의 원시함수는 $\ln|u|$이며, 바로 이 절댓값(modulus)이 대칭성이 성립하게 해 준다.
- $x = e^{\pm 1}$에 극점을 그리는 것. f가 제곱 인수를 가지므로 그곳에서 부호가 바뀌지 않고, 따라서 이 점들은 정상 변곡점이다.
- $x = 1$의 수직 점근선을 빠뜨리거나, 두 갈래를 점근선을 가로질러 이어 버리는 것.

## STEP 너머

F는 적분으로 정의되어 있고, 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)는 f가 연속인 각 구간에서 $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$임을 말해 준다. 두 부분에 서로 다른 기준점이 필요한 것도 이 때문이다. f는 $x = 1$에서 발산하므로, 하나의 적분으로 그 점을 가로지를 수 없다. 대칭 $x \mapsto x^{-1}$은 $u = \ln x$를 통해 $u \mapsto -u$가 되는데, 이는 곱셈적 대칭을 덧셈적 대칭으로 바꾸는 작은 예이며, 이 아이디어는 해석학 전반에 걸쳐 나타난다. 미적분학의 기본정리와 이상적분(improper integral)에 대한 꼼꼼한 설명은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.