풀이

STEP I 2018, 문제 3

순수수학 • 각과 쌍곡선

> **STEP I 2018, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q3

핵심 아이디어

두 각은 모두 탄젠트(tangent)를 통해 P의 좌표와 연결된다. RP의 기울기가 $\tan\alpha$를 주고, SP의 기울기가 $\tan\beta$를 준다. 그러면 조건 $\beta = 2\alpha$는 tan에 대한 배각 공식(double-angle identity)이 되고, 분모를 없애면 곡선의 방정식을 얻는다. 소문항 (ii)는 같은 계산을 거꾸로 따라간다. 문제는 $\tan\beta = \tan 2\alpha$만으로는 β가 π의 정수배 차이까지만 결정된다는 점이다. 따라서 2α가 어느 사분면(quadrant)에 있는지 추적해야 한다.

풀이

각 설정하기

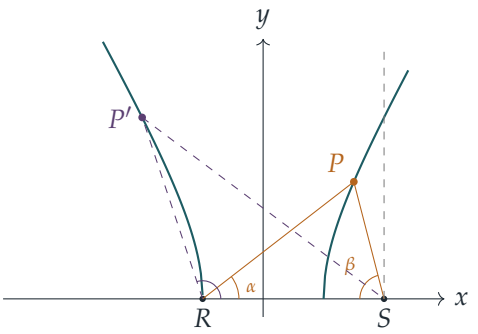
$y > 0$이므로 R에서의 각 α는 양의 x 방향(RS 방향)에서 RP까지 잰 각이다. 따라서 $0 < \alpha < \pi$이고

$$\tan\alpha = \frac{y}{x+a} \qquad (x \neq -a).$$

이 식은 P가 R의 오른쪽에 있을 때(α는 예각, 탄젠트는 양수)와 왼쪽에 있을 때(α는 둔각, 탄젠트는 음수) 모두 성립한다. S에서의 각 β는 음의 x 방향(SR 방향)에서 SP까지 잰 각이다. $x < 2a$이므로 점 P는 S의 왼쪽에 있고, 따라서 β는 예각이며

$$\tan\beta = \frac{y}{2a-x} > 0, \qquad 0 < \beta < \tfrac{\pi}{2}.$$

$x \neq -a$일 때 $t = \tan\alpha$라 하자.



$y > 0, x < 2a$인 곡선 $y^2 = 3(x^2 - a^2)$($a = 1$인 경우를 그림)은 두 조각으로 이루어진다. 하나는 $a < x < 2a$인 오른쪽 가지의 호이고, 다른 하나는 $x < -a$인 왼쪽 가지의 위쪽 전체이다. 왼쪽 가지 위의 점 P'에서는 α가 둔각이 된다.

소문항 (i)

$\beta = 2\alpha$라고 하자. $\beta < \frac{\pi}{2}$이므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$이고, 따라서 $x > -a, 0 < t < 1$이다. 그러므로 $1 - t^2 \neq 0$이어서 배각 공식을 쓸 수 있다.

$$\frac{y}{2a - x} = \tan 2\alpha = \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2y/(x + a)}{1 - y^2/(x + a)^2} = \frac{2y(x + a)}{(x + a)^2 - y^2}.$$

y를 약분하고($y > 0$이므로 가능하다) 양변을 교차하여 곱하면

$$\begin{aligned} &(x + a)^2 - y^2 = 2(x + a)(2a - x) \\ \iff\quad &y^2 = (x + a)\big[(x + a) - 2(2a - x)\big] = (x + a)(3x - 3a) = 3(x^2 - a^2). \end{aligned}$$

따라서 요구한 대로 P는 $y^2 = 3(x^2 - a^2)$ 위에 있다.

소문항 (ii)

이제 P가 곡선 위에 있고 $y > 0, x < 2a$라고 하자. 그러면 $x^2 - a^2 = \frac{1}{3}y^2 > 0$이므로 $|x| > a$, 즉 $a < x < 2a$ 또는 $x < -a$이다. 특히 $x \neq -a$이므로 $t = \tan\alpha$가 정의되고, $t \neq 0$이다.

소문항 (i)의 과정은 거꾸로 따라갈 수 있다. 곡선의 방정식은 $(x + a)^2 - y^2 = 2(x + a)(2a - x)$와 동치이다. 양변을 $(x + a)^2$으로 나누고 $2a - x = y/\tan\beta$를 이용하면

$$1 - t^2 = \frac{2(2a - x)}{x + a} = \frac{2y}{(x + a)\tan\beta} = \frac{2t}{\tan\beta}, \qquad \text{따라서} \qquad (1 - t^2)\tan\beta = 2t.$$

만약 $t^2 = 1$이면 이 식에서 $t = 0$이 되어 모순이다. 따라서 $t^2 \neq 1$이고

$$\tan\beta = \frac{2t}{1 - t^2} = \tan 2\alpha.$$

? 생각해 보기 $\tan\beta = \tan 2\alpha$이면 $\beta = 2\alpha$일까?

꼭 그렇지는 않다. 이 식은 β와 2α가 π의 정수배만큼 차이 난다는 뜻이다. 각의 크기에 대해 아는 사실을 이용하여, 곡선의 두 조각으로 나누어 살펴보자.

경우 $a < x < 2a$. 이때 $x + a > 0$이므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이고 $0 < 2\alpha < \pi$이다. $\tan 2\alpha = \tan\beta > 0$이므로 2α는 β와 같은 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$에 있다. tan은 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 일대일(one-to-one)이므로

$$\beta = 2\alpha.$$

경우 $x < -a$. 이때 $x + a < 0$이므로 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$이고 $\pi < 2\alpha < 2\pi$이다. $\tan 2\alpha > 0$이므로 $2\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$이고, 따라서 $2\alpha - \pi \in (0, \frac{\pi}{2})$이며 $\tan(2\alpha - \pi) = \tan 2\alpha = \tan\beta$이다. 앞에서와 같이 tan은 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 일대일이므로

$$\beta = 2\alpha - \pi.$$

따라서 가능한 관계는 $\beta = 2\alpha$(P가 오른쪽 가지 위에 있을 때)와 $\beta = 2\alpha - \pi$(P가 왼쪽 가지 위에 있을 때)이다. 각 조각의 모든 점이 조건을 만족하므로 두 관계 모두 실제로 나타난다.

검산

- $a = 1$, $P = (-2, 3)$으로 잡자. $3(4 - 1) = 9$이므로 이 점은 곡선 위에 있다. 그러면 $\tan\alpha = 3/(-1) = -3$이므로 $\alpha \approx 108.43°$이고, $\tan\beta = \frac{3}{4}$이므로 $\beta \approx 36.87°$이다. 실제로 $2\alpha - 180° \approx 36.87°$이다.
- 오른쪽 가지에서 $x \to 2a$이면 $y \to 3a$이므로 $\tan\alpha \to 1$, $\tan\beta \to \infty$이다. 즉 $\alpha \to \frac{\pi}{4}$이고 $\beta \to \frac{\pi}{2} = 2\alpha$이다.
- 왼쪽 가지에서 멀리 가면 P는 점근선(asymptote) $y = -\sqrt{3}\,x$에 가까워지므로 $\alpha \to \frac{2\pi}{3}$이고 $\beta \to \frac{\pi}{3} = 2\alpha - \pi$이다.

임의의 a에 대해 각 가지 위의 많은 무작위 점에서 두 관계를 컴퓨터로 확인한 결과도 일치하였다.

흔한 실수

- $\tan\alpha = y/|x + a|$로 쓰거나 α가 예각이라고 가정하는 것. 왼쪽 가지에서는 α가 둔각이고 $\tan\alpha < 0$이다.
- 각의 범위를 확인하지 않고 $\tan\beta = \tan 2\alpha$에서 $\beta = 2\alpha$라고 결론짓는 것. 이렇게 하면 두 번째 관계를 놓친다.

- $x < 2a$와 $y > 0$이 곡선을 두 조각으로 잘라 낸다는 점, 그리고 $x = -a$를 배제하려면 $|x| > a$가 필요하다는 점을 잊는 것.

STEP 너머

이 곡선은 이심률(eccentricity)이 2이고 초점(focus)이 S, 준선(directrix)이 $x = \frac{a}{2}$인 쌍곡선(hyperbola)이다. 소문항 (i)의 성질은 쌍곡선을 이용하여 각을 삼등분(trisection)하는 고전적인 방법(파푸스(Pappus)도 알고 있었다)을 제공하며, 이는 자와 컴퍼스만으로는 삼등분이 불가능하다는 한계를 피해 간다. 그 불가능성의 증명 자체는 체론(field theory) 첫 강좌의 백미이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 이를 다루며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 각과 원뿔곡선(conics)의 기하에 관한 훌륭한 길잡이이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.