풀이

STEP I 2018, 문제 2

순수수학 • 로그 부등식

> **STEP I 2018, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q2

핵심 아이디어

모든 것은 밑변환 공식(change-of-base rule)에 달려 있다. 어떤 밑의 로그든 공통된 밑의 로그들의 비로 나타낼 수 있고, $\frac{1}{\log_b c} = \log_c b$이다. 모든 로그를 ln으로 다시 쓰고 나면, 각 소문항은 부등식을 다루는 짧은 대수 계산이 된다. $e^2 < 8$과 같이 주어진 사실들은 사실 $\ln 2$와 $\ln 10$에 대한 범위를 변장시켜 놓은 것일 뿐이다. 풀이 내내 ln이 증가함수라는 사실을 이용하므로, 양수 사이의 부등식에서 양변에 로그를 취해도 부등호의 방향은 그대로 유지된다.

풀이

첫 번째 결과

로그의 정의에 의해 $x = \log_b c$는

$$c = b^x.$$

를 뜻한다. 양변에 밑이 a인 로그를 취하고 $\log_a(b^x) = x \log_a b$를 이용하면

$$\log_a c = x \log_a b.$$

이다. 여기서 ($\log_b$가 의미를 가지려면) $b \neq 1$이므로 $\log_a b \neq 0$이고, 따라서 양변을 나눌 수 있다.

$$\frac{\log_a c}{\log_a b} = x = \log_b c,$$

이므로 증명이 끝난다. 아래에서는 이로부터 얻는 두 가지 결과를 사용한다. $a = c$로 두면 $\log_b c = \dfrac{1}{\log_c b}$를 얻고, $a = e$로 두면 $\log_b c = \dfrac{\ln c}{\ln b}$를 얻는다.

소문항 (i)

역수 법칙에 의해 $\dfrac{1}{\log_2 \pi} = \log_\pi 2$이고 $\dfrac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 5$이다. 따라서

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi 10.$$

이다. $\pi > 1$이므로 함수 $\log_\pi$는 증가함수이고, $10 > \pi^2$로부터

$$\log_\pi 10 > \log_\pi \pi^2 = 2,$$

를 얻는다. 이것이 바로 구하는 부등식이다.

소문항 (ii)

첫 번째로 주어진 사실을 자연로그(natural logarithm)로 쓰면

$$\log_2 \frac{\pi}{\mathrm{e}} = \frac{\ln \pi - 1}{\ln 2} > \frac{1}{5} \quad \Longrightarrow \quad \ln \pi > 1 + \frac{\ln 2}{5},$$

이다. 여기서 $\ln 2 > 0$을 곱했으므로 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

? **생각해 보기** $\mathrm{e}^2 < 8$은 무엇을 말해 주는가?

이것은 $\ln 2$의 하한이다. 양변에 ln을 취하면(ln이 증가함수이므로 가능하다) $2 < \ln 8 = 3 \ln 2$이므로 $\ln 2 > \frac{2}{3}$이다. 이를 대입하면

$$\ln \pi > 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{15} = \frac{17}{15},$$

이므로 증명이 끝난다.

소문항 (iii)

$\pi^2 < 10$의 양변에 로그를 취하면 $2 \ln \pi < \ln 10$이다. 따라서 $\ln 10 < \frac{30}{13}$임을 보이면 충분하다.

나머지 두 사실도 바꿔 써 보자. $\mathrm{e}^3 > 20$이므로 $3 > \ln 20 = \ln 2 + \ln 10$, 즉

$$\ln 2 < 3 - \ln 10.$$

이다. 또한 $\log_{10} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 10} > \dfrac{3}{10}$이고 $\ln 10 > 0$이므로

$$\ln 10 < \frac{10}{3} \ln 2.$$

이다. 앞의 식은 $\ln 2$의 상한이고, 뒤의 식에서 $\ln 2$의 계수가 양수이므로 앞의 식을 대입할 수 있다.

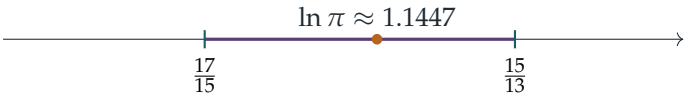
$$\ln 10 < \frac{10}{3} (3 - \ln 10) = 10 - \frac{10}{3} \ln 10.$$

$\ln 10$이 있는 항을 모으면 $\frac{13}{3}\ln 10 < 10$이므로 $\ln 10 < \frac{30}{13}$이다. 그러므로

$$\ln \pi < \tfrac{1}{2}\ln 10 < \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{30}{13} = \frac{15}{13},$$

이므로 증명이 끝난다.

소문항 (ii)와 (iii)을 함께 보면 $\ln \pi$가 좁은 구간 안에 갇힌다.



검산

수치로 계산하면 $\ln \pi \approx 1.1447$이고, 이는 실제로 $\frac{17}{15} \approx 1.1333$과 $\frac{15}{13} \approx 1.1538$ 사이에 있다. 소문항 (i)에서 $\log_\pi 10 \approx 2.0115$로 2보다 아주 조금 크며, 이는 $\pi^2 \approx 9.87$이 10에 매우 가깝다는 점과 들어맞는다. 범위 $\ln 10 < \frac{30}{13} \approx 2.3077$도 $\ln 10 \approx 2.3026$과 비교해 보면 타당하다. 주어진 사실들도 확인해 볼 만하다. $\log_2(\pi/\mathrm{e}) \approx 0.209$, $\mathrm{e}^2 \approx 7.39$, $\mathrm{e}^3 \approx 20.09$, $\log_{10} 2 \approx 0.3010$이다.

흔한 실수

- $\dfrac{1}{\log_2 \pi}$를 $\log_2 \frac{1}{\pi}$로 쓰는 실수. 역수를 취하면 밑과 진수가 서로 바뀌는 것이지, 진수가 역수가 되는 것이 아니다.
- 소문항 (iii)에서 상한이 필요한 자리에 $\ln 2$의 하한을 쓰는 실수. 부등식을 이어 붙이는 것은 각 범위가 같은 방향을 가리킬 때만 가능하다.
- 부등식의 양변에 곱하거나 로그를 취하기 전에 $\ln 2$, $\ln 10$, $\log_\pi$가 적절한 성질(양수이거나 증가함수)을 가진다는 점을 언급하지 않는 실수.

STEP 너머

몇 개의 대략적인 사실로부터 수치적 범위를 증명하는 일은 해석학자들이 상수를 어림하는 방식을 조금 맛보게 해 준다. 해석학(analysis)의 많은 부분은 알지 못하는 양을 다룰 수 있는 두 어림값 사이에 가두는 일로 이루어져 있다. $\ln 2$나 π에 대한 더 정밀한 범위는 급수와 적분 부등식에서 얻어지는데, 예를 들어 $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$를 직사각형으로 어림하는 방법이 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이러한 사고방식을 친절하게 소개하는 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.