풀이

# STEP I 2018, 문제 13

확률과 통계 • 이항분포와 베이즈 정리

> **STEP I 2018, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q13

## 핵심 아이디어

모든 것은 한 가지 셈에 달려 있다. 응시자가 $k$개의 문제를 풀어서 그중 $j$개를 맞히면 점수는 $2j-(k-j)=3j-k$이다. 따라서 합격하려면 적어도 $(k+5)/3$개를 맞혀야 하고, 각 $k$에 대해 이 조건이 정확히 어떤 이항(binomial) 항들을 더해야 하는지 알려 준다. 소문항 (iii)에서는 각 문제가 세 가지 결과(정답, 오답, 풀지 않음)를 갖는다고 보는 것이 깔끔한 방법이며, 이렇게 하면 문제가 하나의 다항(multinomial) 셈으로 바뀐다.

## 풀이

이 풀이 전체에서 무작위로 고른 답이 정답일 확률을 $p=\frac{1}{n}$이라 하고, $q=1-p$라 하자. $n\geq 2$이므로 $0<p\leq\frac{1}{2}$이다.

### 소문항 (i)

A가 정확히 $k$개의 문제를 풀 때 합격할 확률을 $P_k$라 하자. A의 선택은 서로 독립(independent)이므로, 맞힌 문제의 개수 $J$는 이항분포(binomial distribution) $\mathrm{B}(k,p)$를 따른다. 점수는 $3J-k$이므로, A가 합격하는 것은 정확히

$$3J-k\geq 5 \iff J\geq\frac{k+5}{3}.$$

일 때이다. $k$의 값을 차례로 살펴보자.

- $k=0,1,2$: 각각 $J\geq\frac{5}{3},2,\frac{7}{3}$, 즉 $J\geq 2$, $J\geq 2$, $J\geq 3$이어야 하는데, $J\leq k$이므로 이는 불가능하다(최고 점수가 $2k\leq 4$이다). 따라서 $P_0=P_1=P_2=0$이다.
- $k=3$: $J\geq\frac{8}{3}$이어야 하므로 $J=3$이고, $P_3=p^3$이다.

▶ $k = 4$: $J \geq 3$이어야 하므로

$$P_4 = \binom{4}{3} p^3 q + p^4 = 4p^3(1-p) + p^4 = p^3(4-3p).$$

▶ $k = 5$: $J \geq \frac{10}{3}$이어야 하므로 $J = 4$ 또는 5이고,

$$P_5 = \binom{5}{4} p^4 q + p^5 = 5p^4(1-p) + p^5 = p^4(5-4p).$$

이제 $P_4$를 두 경쟁 상대와 비교하자. $p < 1$이므로 $4 - 3p > 1$이고, 따라서 $P_4 > p^3 = P_3$이다. 또한 $0 < p < 1$이므로

$$P_4 - P_5 = p^3\big[(4-3p) - p(5-4p)\big] = p^3\big(4p^2 - 8p + 4\big) = 4p^3(1-p)^2 > 0,$$

이다. $P_4 > 0$이므로 $P_0 = P_1 = P_2 = 0$보다도 크다. 따라서 $P_4$가 엄밀하게 가장 크고, 요구한 대로 A는 $k = 4$를 선택해야 한다.

**생각해 보기** 다섯 문제를 모두 풀면 점수를 얻을 기회가 당연히 더 많아지지 않을까?

여기서는 그렇지 않다. 다섯 문제를 풀면 네 개를 맞혀야 하는데, 다섯 번째 문제는 틀릴 때마다 1점을 잃게 하고, 맞힐 때보다 틀릴 때가 훨씬 많기 때문이다. 네 문제를 풀면 세 개만 맞혀도 충분하다. 인수분해(factorisation) $4p^3(1-p)^2$를 보면 이 이점이 $n$이 클 때뿐만 아니라 모든 $n \geq 2$에 대해 성립함을 알 수 있다.

### 소문항 (ii)

B가 푸는 문제의 개수를 $K$라 하면 $k = 0, \ldots, 5$에 대해 $\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{6}$이다. B가 합격하는 사건을 $S$라 하자. $K = k$가 주어지면 B는 A와 정확히 같은 처지이므로 $\mathrm{P}(S \mid K = k) = P_k$이다. 베이즈 정리(Bayes' theorem)에 의해

$$\mathrm{P}(K = 4 \mid S) = \frac{\frac{1}{6}P_4}{\frac{1}{6}(P_0 + P_1 + \cdots + P_5)} = \frac{p^3(4-3p)}{p^3 + p^3(4-3p) + p^4(5-4p)}.$$

이다. $p^3$(0이 아니다)으로 약분하면 분모는 $1 + 4 - 3p + 5p - 4p^2 = 5 + 2p - 4p^2$가 되므로

$$\mathrm{P}(K = 4 \mid S) = \frac{4-3p}{5+2p-4p^2}.$$

이다. $p = \frac{1}{n}$을 대입하고 분자와 분모에 $n^2$을 곱하면

$$\mathrm{P}(K = 4 \mid S) = \frac{4n^2 - 3n}{5n^2 + 2n - 4} = \frac{n(4n-3)}{5n^2 + 2n - 4}.$$

이다.

**소문항 (iii)**

각 문제에 대해 C의 동전 던지기와 답의 선택은 서로 독립이고, 다른 문제에서 일어나는 일과도 독립이다. 따라서 각 문제는 독립적으로 다음 세 가지 결과 중 하나를 갖는다.

$$\begin{aligned} \text{정답 } (+2): &\quad \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}, \\ \text{오답 } (-1): &\quad \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{n-1}{n+1}, \\ \text{풀지 않음 } (0): &\quad \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

C가 $c$개를 맞히고 $w$개를 틀렸다고 하자. 단, $c+w\le 5$이다. C가 합격하는 것은 $2c-w\ge 5$일 때이다. 이로부터 반드시 $c\ge 3$이고, 이때

- $c=3$: $w\le 1$이어야 한다.
- $c=4$: $c+w\le 5$이므로 $w\le 1$은 자동으로 성립한다.
- $c=5$: $w=0$이다.

정답 $c$개, 오답 $w$개, 풀지 않은 문제 $5-c-w$개를 배정하는 방법의 수는 다항계수(multinomial coefficient) $\frac{5!}{c!\,w!\,(5-c-w)!}$이다. 정답인 문제와 풀지 않은 문제의 확률이 똑같이 $\frac{1}{n+1}$이므로, 각 배열의 확률은 $\dfrac{(n-1)^w}{(n+1)^5}$이다. 다섯 가지 경우를 모두 더하면 다음과 같다.

| $(c,w)$ | 배열의 수 | 확률 $\times(n+1)^5$ |
|---|---|---|
| $(3,0)$ | 10 | 10 |
| $(3,1)$ | 20 | $20(n-1)$ |
| $(4,0)$ | 5 | 5 |
| $(4,1)$ | 5 | $5(n-1)$ |
| $(5,0)$ | 1 | 1 |

합계는 $16+25(n-1)=25n-9$이므로

$$\mathrm{P}(\text{C가 합격})=\frac{25n-9}{(n+1)^5}.$$

이다.

## 검산

- $n=2$일 때: $P_3=\frac{1}{8}$, $P_4=\frac{5}{16}$, $P_5=\frac{3}{16}$이므로 $k=4$가 가장 좋다. (ii)의 공식은 $\frac{2\cdot 5}{20}=\frac{1}{2}$를 주며, 이는 직접 계산한 $\frac{5/16}{10/16}$과 일치한다.

- (iii)에서 $n = 3$일 때 답은 $\frac{66}{1024} \approx 0.0645$이고, 200 000번의 시험을 컴퓨터로 시뮬레이션(simulation)한 결과는 0.0644였다. 세 공식 모두 $n = 2, \ldots, 29$에 대해 컴퓨터로 정확히 전수 계산한 결과와도 일치한다.
- $n \to \infty$일 때 (ii)의 답은 $\frac{4}{5}$로 수렴(converge)한다. 찍어서 맞히기가 거의 불가능할 때, 합격은 거의 언제나 네 문제를 푼 경우(세 개를 맞혀야 함)에서 나오며, 다섯 문제를 푼 경우(네 개를 맞혀야 함)나 세 문제를 푼 경우(세 개를 모두 맞혀야 하며, 그 확률 $p^3$은 $4p^3$보다 훨씬 작음)에서 나오는 일은 드물다.

## 흔한 실수

- 다섯 문제를 풀었을 때 세 개를 맞히면 $6 - 2 = 4$점이 되어 불합격이라는 사실을 잊는 것. 네 개를 맞혀야 한다.
- (ii)에서 분모에 $P_3$을 빠뜨리는 것. 세 문제를 풀어서 세 개를 모두 맞히는 것도 합격하는 방법이다.
- (iii)을 "확률 $\binom{5}{k}h^k(1-h)^{5-k}$로 $k$개의 문제를 푼다"로 보고 소문항 (i)을 이용하는 방법도 통하지만, 항 하나를 빠뜨리기 쉽다. 세 가지 결과로 세는 방법이 더 깔끔하다.

## STEP 너머

소문항 (iii)은 **솎아내기**(thinning)의 한 예이다. 각 문제가 어떤 확률로 남겨지고 결과들은 여전히 독립이므로, 정답, 오답, 건너뛴 답의 개수는 다항분포(multinomial distribution)를 따른다. 소문항 (ii)는 베이즈 갱신(Bayesian updating)으로, 현대 통계학의 상당 부분을 이루는 아이디어이다. 두 내용 모두 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문), 그리고 Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률: 입문)에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.