풀이

STEP I 2018, 문제 11

역학 • 경사면 위의 마찰

> **STEP I 2018, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q11

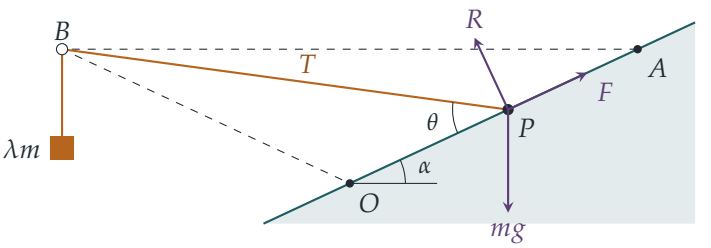
핵심 아이디어

먼저 기하부터 살펴본다. $OA = OB = d$이므로 삼각형 OAB는 이등변삼각형(isosceles triangle)이고, AB가 수평이므로 두 밑각은 모두 α이다. 줄은 P에서 O 쪽을 지나 B를 향해 뻗어 있으므로, P를 일부는 경사면 **아래쪽으로**, 일부는 평면에서 **떨어지는** 쪽으로 당긴다. 따라서 마찰력(friction)이 입자를 위로 붙잡아야 하고, 수직항력(normal reaction)은 장력(tension) 때문에 줄어든다. 평형(equilibrium)의 각 조건은 θ에 대한 부등식(inequality)이고, 이 부등식은 (i)에서 구한 범위의 모든 θ에 대해 성립해야 하므로 가장 불리한 위치를 찾는다.

풀이

P와 매달린 물체를 입자(particle)로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는(light and inextensible) 것으로, 도르래(pulley)를 매끄러운 것으로 모형화한다. 따라서 장력은 줄 전체에서 같다. 매달린 입자는 평형 상태이므로

$$T = \lambda m g.$$



소문항 (i)

O를 원점에 두고 x축을 수평으로 잡는다. 그러면 $A = (d\cos\alpha,\ d\sin\alpha)$이다. 점 B는 A와 높이가 같고 O로부터 거리가 d이므로 $B = (\pm d\cos\alpha,\ d\sin\alpha)$이다. 양의 부호를 택하면 A 자신이 되므로

$$B = (-d\cos\alpha,\ d\sin\alpha).$$

이 점은 평면을 나타내는 직선보다 위에 있고, O를 기준으로 A의 반대편에 있다. 삼각형 OAB에서 $OA = OB = d$이고, AB는 수평이며 AO가 수평선과 각 α를 이루므로 $\angle OAB = \alpha$이다. 따라서 $\angle OBA = \alpha$이기도 하고, $\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha$이며, $\alpha < 45^\circ$이므로 이 각은 둔각이다.

P가 OA 위에 있다고 하자. 줄은 PB를 따라 놓이고, 줄이 L과 이루는 예각은 $\theta = \angle BPO$이다. 곧 보이겠지만 이 각은 최대 $2\alpha < 90^\circ$이므로 예각이다. 이 각은 삼각형 PAB의 외각(exterior angle)이므로

$$\theta = \angle BPO = \angle PAB + \angle PBA = \alpha + \angle PBA.$$

P가 O에서 A로 움직이면 반직선 BP는 BO에서 BA 쪽으로 돌아가므로, $\angle PBA$는 $\angle OBA = \alpha$에서 0까지 감소한다. 따라서

$$\alpha \le \theta \le 2\alpha,$$

이고, P가 O에 있을 때 $\theta = 2\alpha$이며 P가 A에 가까워질수록 $\theta \to \alpha$이다.

이것이 힘에 대해 무엇을 뜻하는지 짚어 두자. 경사면 아래 방향 PO에서 재면, 줄은 예각 θ를 이루며 평면에서 멀어지는 쪽을 향한다. 따라서 장력은 경사면 아래쪽으로 성분 $T\cos\theta$를, 평면에 수직인 방향으로 성분 $T\sin\theta$를 가지며, 후자는 P를 평면에서 떼어 놓는 쪽으로 당긴다.

소문항 (ii)

평면에 수직인 방향으로 힘을 분해(resolving)하면

$$R = mg\cos\alpha - T\sin\theta = mg(\cos\alpha - \lambda\sin\theta).$$

생각해 보기 μ를 모르는데, 이 소문항에서 마찰력은 어디에 있는가?

마찰력은 필요 없다. μ가 무엇이든 P는 평면과 접촉한 채로 있어야 하므로 $R \ge 0$이어야 한다. (사실은 $R > 0$이다. $R = 0$이면 마찰력이 없어서, 경사면을 따라 작용하는 $mg\sin\alpha + T\cos\theta > 0$과 균형을 이룰 것이 아무것도 없다.) 따라서 모든 점에서 평형이려면 다음이 필요하다.

$$\lambda\sin\theta \le \cos\alpha \quad \text{나타나는 모든} \theta \text{에 대하여.}$$

sin은 $[\alpha, 2\alpha] \subset [0^\circ, 90^\circ)$에서 증가하므로, $\sin\theta$의 최댓값은 $\theta = 2\alpha$에서(또는 P가 O에 가까워질 때 그 값에 임의로 가깝게) 나타난다. 그러므로 $\lambda \sin 2\alpha \le \cos\alpha$, 즉 $2\lambda \sin\alpha \cos\alpha \le \cos\alpha$이다. $\cos\alpha > 0$으로 나누면

$$2\lambda \sin\alpha \le 1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

중력과 장력이 모두 P를 경사면 아래로 당기므로, 마찰력 F는 경사면 위쪽으로 작용한다. 경사면을 따라 분해하면

$$F = mg\sin\alpha + T\cos\theta = mg(\sin\alpha + \lambda\cos\theta).$$

이 위치에서 평형이 가능할 필요충분조건은 $F \le \mu R$이다($F > 0$이므로 이 조건은 $R > 0$도 보장한다). $\mu = \tan\beta$로 두면 조건은 다음과 같다.

$$\sin\alpha + \lambda\cos\theta \le \frac{\sin\beta}{\cos\beta}(\cos\alpha - \lambda\sin\theta).$$

$\cos\beta > 0$을 곱하고 λ가 있는 항을 모으면

$$\lambda(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta) \le \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha,$$
$$\lambda\cos(\beta - \theta) \le \sin(\beta - \alpha).$$

여기서 $0 < \beta < 90^\circ$이고 $0 < \theta \le 2\alpha < 90^\circ$이므로 $-90^\circ < \beta - \theta < 90^\circ$이고 $\cos(\beta - \theta) > 0$이다. 따라서 각이 θ인 위치에서 평형이 가능한 것은 정확히 다음이 성립할 때이다.

$$\lambda \le \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - \theta)}.$$

이것이 모든 위치에서 성립하려면 $\cos(\beta - \theta)$가 가장 큰 곳, 즉 범위 $\alpha \le \theta \le 2\alpha$ 안에서 θ가 β에 가장 가까운 곳에서 성립해야 한다.

경우 $\beta \ge 2\alpha$. 범위 안의 모든 θ는 β 이하이므로 $0 \le \beta - 2\alpha \le \beta - \theta \le \beta - \alpha < 90^\circ$이다. 코사인은 $[0^\circ, 90^\circ)$에서 감소하므로, $\cos(\beta - \theta)$는 $\theta = 2\alpha$, 즉 O에 있거나 그 바로 옆인 위치에서 가장 크다. 따라서 필요조건(necessary condition)은

$$\lambda \le \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - 2\alpha)}.$$

다른 모든 위치에서는 λ에 대한 제한이 더 약하므로, 이 조건은 충분조건(sufficient condition)이기도 하다.

경우 $\alpha \le \beta \le 2\alpha$. 이제 $\theta = \beta$가 범위 안에 있다. 소문항 (i)에 의해, L 위에서 O와 A 사이에 있는 P의 어떤 위치가 정확히 이 각을 준다($\beta = \alpha$이면 $P \to A$일 때의 극한으로 얻는다). 그

위치에서 $\cos(\beta-\theta)=1$로 가능한 가장 큰 값이 되고, 조건은 다음과 같이 된다.

$$\lambda \le \sin(\beta-\alpha).$$

그 위치에서 줄은 전체 접촉력(total contact force)에 수직인데, 마찰력이 한계에 이르렀을 때 이 접촉력은 법선과 각 β를 이룬다. $\beta=\alpha$이면 $\lambda=0$일 수밖에 없다. 이때 입자는 자기 무게만으로 겨우 한계 평형(limiting equilibrium) 상태에 있으므로, 줄에 조금이라도 장력이 있으면 미끄러진다.

검산

- 두 답은 $\beta=2\alpha$일 때 일치한다. 이때 $\cos(\beta-2\alpha)=1$이고, 둘 다 $\lambda \le \sin\alpha$를 준다.
- $\lambda=0$이면 조건은 $\sin(\beta-\alpha)\ge 0$, 즉 $\mu \ge \tan\alpha$가 되는데, 이는 거친 경사면 위에 물체가 정지해 있을 익숙한 조건이다.
- $\alpha=20^\circ$, $\beta=50^\circ$이면 한계값은 $\sin 30^\circ / \cos 10^\circ \approx 0.508$이다. 컴퓨터 검산에서는 P를 OA 위의 여러 점에 두고 힘을 직접 분해하여, 모든 곳에서 평형을 주는 가장 큰 λ가 수천 개의 무작위 α와 β에 대해 두 공식과 일치함을 확인하였다. 또한 $\alpha \le \theta \le 2\alpha$임도 확인하였다.

흔한 실수

- B를 O에 대해 A와 같은 쪽에 두는 것. $OB=OA$이고 $B\neq A$이므로 B는 O의 반대편에 있고, 따라서 장력은 P를 경사면 위가 아니라 **아래로** 당긴다.
- 장력이 수직항력을 줄이고, 그 결과 쓸 수 있는 마찰력도 줄어든다는 사실을 잊는 것.
- (iii)의 두 번째 경우에서 양 끝 위치만 확인하는 것. 가장 불리한 위치는 $\theta=\beta$인 곳이며, 이는 범위의 내부에 있다.

STEP 너머

조합 $\lambda\cos(\beta-\theta)\le\sin(\beta-\alpha)$는 **마찰각**(angle of friction)을 대수적으로 나타낸 것이다. 전체 접촉력은 법선으로부터 각 β 이내에 있어야 하며, 이 영역을 마찰 원뿔(cone of friction)이라고 한다. 이 원뿔의 관점에서 생각하면 많은 마찰 문제가 기하학 한 줄로 정리된다. "모든 위치에서" 평형을 요구하는 것은 작은 최적화(optimisation) 문제이며, 공학자들도 최악의 경우에 대비해 설계할 때 같은 방식으로 추론한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰과 자유물체도(free-body diagram)를 꼼꼼하게 다루며, 도전적인 문제도 많이 담고 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.