풀이

STEP I 2018, 문제 10

역학 • 연결된 입자

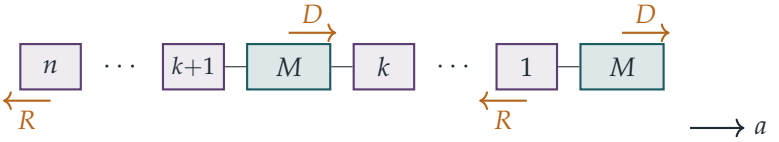
> **STEP I 2018, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q10

핵심 아이디어

모든 차량의 가속도(acceleration)는 같으므로, 열차 전체로부터 가속도를 한 번 구한 다음 열차에서 가장 다루기 편한 부분에 뉴턴(Newton)의 제2법칙(Newton's second law)을 적용한다. 열차를 어떤 연결기(coupling)에서 끊으면 그 연결기의 장력(tension)이 외력(external force)으로 드러난다. 뒤의 소문항들을 쉽게 만드는 요령은 맨 앞 연결기의 장력 T를 두 가지 방법, 즉 맨 앞 기관차로부터 한 번, 그 뒤의 모든 것으로부터 한 번 구하는 것이다. 이렇게 하면 T가 하나의 양 $R + ma$와 연결되는데, 이 양은 다른 모든 연결기의 장력도 지배한다.

풀이

모형. 각 기관차와 객차를 수평 선로를 따라 움직이는 입자(particle)로, 연결기를 장력 또는 압축(compression)을 받을 수 있는 가벼운 막대로 본다. 기관차에는 저항(resistance)이 작용하지 않고, 각 차량에 작용하는 연직 방향의 힘은 평형을 이루므로 수평 방향의 힘만 고려하면 된다. 가속도 a는 운동 방향을 양으로 잡는다. 객차에 앞에서부터 $1, 2, \ldots, n$의 번호를 붙여, 객차 $1, \ldots, k$는 두 기관차 사이에, 객차 $k+1, \ldots, n$은 두 번째 기관차 뒤에 있도록 한다(단, $1 \le k \le n-1$).



(각 객차에는 뒤쪽으로 저항 R가 작용한다. 그림에는 두 개만 그렸다.)

가속도. 열차 전체의 질량은 $nm + 2M$이고 연결기의 힘은 내력이므로

$$(nm + 2M)a = 2D - nR, \qquad a = \frac{2D - nR}{nm + 2M} > 0,$$

이다. $2D > nR$이므로 이 값은 양수이다. 특히 $R + ma > 0$이며, 이 사실을 거듭 사용한다.

소문항 (i)

맨 앞 기관차는 앞쪽으로 D, 뒤쪽으로 연결기의 장력 T를 받으므로

$$D - T = Ma.$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} T = D - \frac{M(2D - nR)}{nm + 2M} &= \frac{D(nm + 2M) - 2MD + nMR}{nm + 2M} \\ &= \frac{n(mD + MR)}{nm + 2M}, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

T의 더 깔끔한 꼴. 이번에는 맨 앞 기관차 뒤의 모든 것, 즉 기관차 하나와 객차 n량을 보자. 전체 질량은 $M + nm$이다. 이 부분은 T와 두 번째 기관차의 D에 의해 앞으로 당겨지고, nR의 저항을 받는다.

$$T + D - nR = (M + nm)a.$$

이 식에서 $D - T = Ma$를 빼면 D가 소거된다.

$$2T - nR = nma, \qquad \text{따라서} \qquad T = \tfrac{1}{2}n\,(R + ma).$$

소문항 (ii)

맨 앞 연결기를 제외한 모든 연결기는 두 종류 가운데 하나이다.

두 번째 기관차 앞의 연결기. $1 \le j \le k$에 대하여 객차 j 바로 뒤의 연결기의 장력을 T_j라 하자(따라서 T_k는 객차 k와 두 번째 기관차 사이 연결기의 장력이다). 맨 앞 기관차와 객차 $1, \ldots, j$의 질량은 $M + jm$이고, T_j에 의해 뒤로 당겨진다.

$$D - jR - T_j = (M + jm)a \quad \Longrightarrow \quad T_j = (D - Ma) - j(R + ma) = T - j(R + ma).$$

$R + ma > 0$이고 $j \ge 1$이므로, k의 값에 관계없이 이러한 모든 연결기에 대하여 $T_j < T$이다.

두 번째 기관차 뒤의 연결기. $k+1 \le j \le n$에 대하여 객차 j 바로 앞의 연결기의 장력을 S_j라 하자. 그 뒤에 있는 차량들을 보는 것이 가장 쉽다. 객차 $j, \dots, n$은 모두 $n-j+1$량이며, 앞으로는 S_j에 의해서만 당겨진다.

$$S_j - (n-j+1)R = (n-j+1)ma \quad \Longrightarrow \quad S_j = (n-j+1)(R+ma).$$

> ? **생각해 보기** 뒤쪽 연결기 가운데 어느 것의 장력이 가장 크며, 그것은 T와 비교하여 어떠한가?

장력 S_j는 j가 커질수록 작아지므로, 가장 큰 것은 두 번째 기관차 바로 뒤의 연결기의 장력 $S_{k+1} = (n-k)(R+ma)$이다. 이를 $T = \frac{1}{2}n(R+ma)$와 비교하고 $R+ma > 0$으로 나누면

$$S_{k+1} < T \iff n-k < \tfrac{1}{2}n \iff k > \tfrac{1}{2}n.$$

이다. 따라서 $k > \frac{1}{2}n$이면 뒤쪽의 모든 연결기의 장력은 $S_{k+1} < T$ 이하이고, 앞쪽의 모든 연결기에 대하여 $T_j < T$이다. 그러므로 T는 다른 어느 연결기의 장력보다도 크며, 이것이 구하려던 결과이다. (이 조건은 필요조건이기도 하다. $k \le \frac{1}{2}n$이면 $S_{k+1} \ge T$이다.)

소문항 (iii)

객차 k와 두 번째 기관차 사이의 연결기를 보자. 소문항 (ii)와 $T = \frac{1}{2}n(R+ma)$로부터

$$T_k = T - k(R+ma) = \left(\tfrac{1}{2}n - k\right)(R+ma).$$

이다. $k > \frac{1}{2}n$이면 첫째 인수는 음수이고 둘째 인수는 양수이므로 $T_k < 0$이다. 즉 이 연결기는 압축을 받는다. 물리적으로 보면, 맨 앞 기관차가 앞에서 끄는 동안 두 번째 기관차는 자기 앞의 객차 k량, 즉 열차의 절반이 넘는 부분을 밀고 있는 것이다.

검산

- $n=5, k=3, M=10, m=2, D=20, R=1$이라 하자. 그러면 $a = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$이고, 공식에서 $T = \frac{5(40+10)}{30} = \frac{25}{3}$를 얻으며, 이는 $D - Ma = 20 - \frac{35}{3}$와 일치한다. 열차를 따라 뒤로 가면서 장력은 $\frac{25}{3}, 5, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}$(객차 3과 기관차 사이), 그다음 $\frac{20}{3}, \frac{10}{3}$이다. 따라서 T가 가장 크고, 예측한 대로 정확히 하나의 연결기가 압축을 받는다.
- $M=0$이면 기관차는 단지 힘일 뿐이고 $T=D$인데, 질량이 없는 맨 앞 기관차라면 마땅히 그래야 한다.
- 각 장력은 힘에 차원이 없는 비를 곱한 것이므로 단위가 올바르다.

흔한 실수

- 기관차에도 저항을 주는 것. 문제에서는 객차에만 저항이 작용한다.

- 두 번째 기관차를 포함하는 열차 구간이라면 어디든 그 기관차의 구동력(driving force)이 작용한다는 것을 잊는 것.
- 모든 연결기가 반드시 장력을 받는다고 가정하는 것. 연결기는 막대이므로 음의 장력은 물리적으로 전혀 문제없는 미는 힘이다.

STEP 너머

계를 여러 부분으로 나누어 각각에 대해 따로 자유물체도(free-body diagram)를 그리고, 내력이 크기가 같고 방향이 반대인 쌍으로 나타나게 하는 것은 연결된 물체의 역학의 기초이다. 대학 1학년 과정에서 이는 트러스(truss)와 골조(framework)의 해석으로 이어진다. 여기서는 여러 부재의 내력을 한꺼번에 구하며, 어떤 부재는 장력을 받는 인장재(tie)가 아니라 압축을 받는 압축재(strut)로 밝혀지기도 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 자유물체도와 뉴턴의 제3법칙(Newton's third law)을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.