풀이

STEP I 2018, 문제 1

순수수학 • 곡선 사이의 넓이

> **STEP I 2018, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q1

핵심 아이디어

삼차식(cubic)과 직선을 같다고 놓으면 x라는 인수가 나오고, 남은 부분은 제곱의 차(difference of two squares)가 되므로 세 교점(intersection)이 모두 깔끔하게 구해진다. 그 뒤로는 모두 정형적인 미적분 계산이며, 치환(substitution) $c = b - a$(P의 x좌표)를 쓰면 식 계산이 간결해진다. 마지막 부등식은 처음에는 어려워 보이지만, 두 넓이를 모두 c로 나타내고 나면 $b > a$로 간단히 정리된다.

풀이

교점과 개형

교점에서는 $x(b-x)^2 = a^2x$이므로 $x = 0$(원점)이거나

$$(b-x)^2 = a^2 \quad \Longrightarrow \quad b - x = \pm a \quad \Longrightarrow \quad x = b - a \text{ 또는 } x = b + a.$$

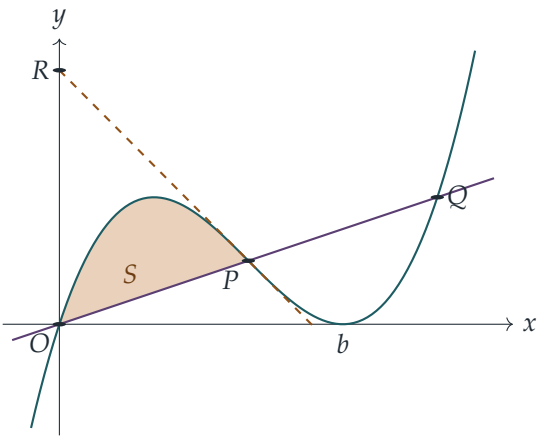
이다. $a > 0$이므로 $b - a < b + a$이고, 따라서

$$P = (b-a,\ a^2(b-a)), \qquad Q = (b+a,\ a^2(b+a)).$$

이다. $0 < a < b$이므로 두 점은 모두 제1사분면(first quadrant)에 있다.

개형을 그려 보자. 삼차곡선 $y = x(b-x)^2$은 O에서 단순근을 가지고 $x = b$에서 중근(repeated root)을 가지며, 그 점에서 x축에 접한다. $x < 0$이면 음수이고, $x > 0$이면($x = b$를 제외하고) 양수이며, $x \to \infty$일 때 $+\infty$로 발산한다. 도함수(derivative)는 (아래에서 구하듯이) $(b-x)(b-3x)$이므로, $x = b/3$에서 극대(local maximum)를 가지고 $(b, 0)$에서 극소(local minimum)를 가진다. O를 지나는 직선은 O 근처에서 증가하는 부분을 자르고, P에서 다시 곡선과 만나며($a < \frac{2}{3}b$이면 $b/3$과 b 사이에서, 그렇지 않으면 $b/3$보

다 앞에서), 접점 $x = b$를 지난 곳의 Q에서 세 번째로 곡선과 만난다. 그림은 $a = 1, b = 3$인 경우이며, P에서의 접선, 점 R, 그리고 넓이가 S인 영역도 함께 나타냈다.



P에서의 접선

곱의 미분법(product rule)으로 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (b-x)^2 - 2x(b-x) = (b-x)(b-3x).$$

이다. P에서는 $x = b - a$이므로 $b - x = a$이고 $b - 3x = 3a - 2b$이다. 따라서 그 점에서의 기울기(gradient)는 $m = a(3a - 2b)$이다.

접선(tangent)을 $y = mx + k$라 하고, 이 직선이 P를 지나도록 k를 정하면

$$\begin{aligned} k &= a^2(b-a) - a(3a-2b)(b-a) \\ &= a(b-a)(a-3a+2b) \\ &= 2a(b-a)^2. \end{aligned}$$

이다. 그러므로 P에서의 접선은 요구한 대로 $y = a(3a - 2b)x + 2a(b - a)^2$이다. 특히 $R = (0, 2a(b-a)^2)$이며, 이 점은 y축의 양의 부분 위에 있다.

넓이 S

P의 x좌표를 $c = b - a > 0$이라 하자. $0 < x < c$에서

$$x(b-x)^2 - a^2x = x\,(b-x-a)(b-x+a) > 0,$$

이다. 이 구간에서 세 인수가 모두 양수이기 때문이다. 따라서 O와 P 사이에서는 곡선이 직선보다 위에 있고,

$$S = \int_0^c (x(b-x)^2 - a^2x)\,\mathrm{d}x = \int_0^c ((b^2-a^2)x - 2bx^2 + x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{(b^2-a^2)c^2}{2} - \frac{2bc^3}{3} + \frac{c^4}{4}.$$

이다. 이제 $b^2 - a^2 = c(b+a) = c(c+2a)$와 $b = c + a$를 대입하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{c^3(c+2a)}{2} - \frac{2c^3(c+a)}{3} + \frac{c^4}{4} \\ &= c^3\left[\, c(\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}) + a(1 - \tfrac{2}{3})\right] \\ &= c^3\Big(\frac{c}{12} + \frac{a}{3}\Big) = \frac{c^3(c+4a)}{12}. \end{aligned}$$

이다. $c + 4a = b + 3a$이므로 이는

$$S = \frac{1}{12}(b-a)^3(3a+b),$$

이고, 요구한 결과와 같다.

> ? **생각해 보기** 그냥 모든 것을 a와 b로 전개하면 안 될까?

그래도 되지만, 목표식에는 $(b-a)^3$이라는 인수가 있고, a와 b에 관한 사차식에서 이 인수를 뽑아내는 것은 고통스럽다. $c = b - a$로 쓰면 적분의 모든 항이 이미 c^2 이상을 포함하므로, 이 인수가 저절로 나타난다.

삼각형 T와 부등식

삼각형 OPR의 밑변을 OR로 잡자. 이 변은 y축 위에 있고 길이는 $2ac^2$이다. 높이는 P에서 y축까지의 거리, 즉 c이다. 따라서

$$T = \tfrac{1}{2} \cdot 2ac^2 \cdot c = ac^3 = a(b-a)^3.$$

이다. 그러므로 $(b-a)^3 > 0$이므로

$$S - \tfrac{1}{3}T = \frac{(b-a)^3}{12}(3a + b - 4a) = \frac{(b-a)^4}{12} > 0,$$

이다. $b \neq a$이기 때문이다. 따라서 요구한 대로 $S > \frac{1}{3}T$이다.

검산

- $a = 1, b = 3$일 때(그림의 경우): $P = (2,2)$, $Q = (4,4)$이고, 곡선의 식은 $x = 2$에서 $y = 2$, $x = 4$에서 $y = 4$를 준다. 접선 공식은 $y = -3x + 8$을 주며, 기울기 공식 $(3-x)(3-3x)$은 $x = 2$에서 -3이다. 직접 적분하면 $S = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,\mathrm{d}x = 4 - 16 + 16 = 4$이고, 이는 $\frac{1}{12} \cdot 8 \cdot 6 = 4$와 일치한다. 또한 $T = 8$이고 $4 > \frac{8}{3}$이다.
- 비 $S/(\frac{1}{3}T) = (3a+b)/(4a)$는 $b \to a$일 때 1로 수렴하므로, 상수 $\frac{1}{3}$은 가능한 최선의 값이다. 이는 납득할 만하다. 포물선(parabola) $y = px - qx^2$에 대해 같은 작도를 하면 $S = qc^3/6$, $T = qc^3/2$이므로 정확히 $S = \frac{1}{3}T$이고, P가 O에 매우 가까우면 두 점 사이의 삼차곡선은 거의 포물선이기 때문이다.

- $0 < a < b$인 무작위 쌍 수천 개에 대해 교점, 접선, (수치적분으로 구한) 넓이, 부등식을 컴퓨터로 확인한 결과 모두 공식과 일치했다.

흔한 실수

- $x(b-x)^2 = a^2x$를 x로 나누면서 근 $x = 0$을 언급하지 않거나, $b - x = a$만 택해서 Q를 놓치는 것.
- 직선에서 곡선을 빼서 적분하여 음수인 "넓이"를 얻는 것. 적분하기 전에 어느 그래프가 위에 있는지 확인해야 한다.
- 개형에서 삼차곡선이 $x = b$에서 x축에 접하지 않고 x축을 가로지르도록 그리는 것.

STEP 너머

마지막 부분에서 극한 비가 1이 된다는 사실은 아르키메데스(Archimedes)의 포물선 구적(quadrature of the parabola)과 같은 정신을 담고 있다. 포물선의 경우 활꼴의 넓이는 삼각형 OPR 넓이의 정확히 3분의 1이고, O 근처에서 삼차곡선은 국소적으로 포물선이므로, 극한에서 부등식은 등식으로 좁혀진다. 국소적인 행동이 왜 테일러(Taylor) 전개의 처음 몇 항에 의해 결정되는지 이해하고, "거의 포물선"이라는 말을 엄밀하게 만드는 것이 대학 1학년 해석학(analysis)의 일이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 테일러 정리(Taylor's theorem)를 제대로 다루는 모습을 볼 수 있는 친절한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.