풀이

STEP III 2017, 문제 9

역학 • 연결된 입자와 에너지

STEP III 2017, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

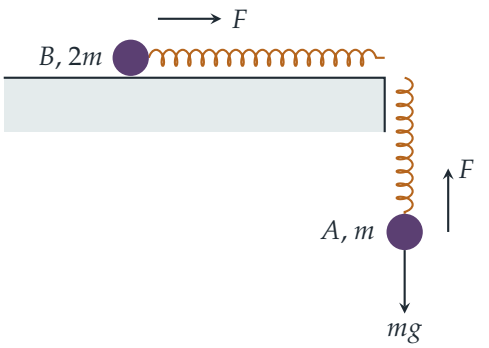
step.maths.org/questions/17-s3-q9

핵심 아이디어

용수철의 장력(tension)은 알 수 없고 시간에 따라 변하지만, 두 입자에 같은 크기로 작용한다. 따라서 두 운동 방정식(equation of motion)을 알맞은 비율로 더하면 장력이 소거되고, 곧바로 적분할 수 있는 식이 남는다. 두 번째 부분에서는 이렇게 적분한 관계식으로 시각 T에서 두 입자의 위치와 두 속력 사이의 관계를 알 수 있다. 여기에 에너지 보존(conservation of energy)으로 두 번째 식을 얻고, 두 식을 함께 쓰면 B의 속력이 정해진다.

풀이

A와 B를 입자로, 용수철을 가벼운 것으로 모형화한다. 탁자는 매끄럽고, 용수철은 탁자 모서리 위를 매끄럽게 지나간다. 놓아 준 뒤 A는 연직으로 떨어지고 B는 탁자 위를 따라 모서리 쪽으로 미끄러진다. 시각 t에서 용수철의 장력을 F라 하자. $x < a$인 동안 B는 아직 탁자 위에 있다.



관계식 $y + 2x = \frac{1}{2}gt^2$

A에 대해서는 아래쪽을 y의 양의 방향으로, B에 대해서는 모서리 쪽을 x의 양의 방향으로 잡는다. 뉴턴 제2법칙(Newton's second law)에 의해

$$\text{입자}A\text{에 대해 (연직 방향)}: \quad m\ddot{y} = mg - F,$$
$$\text{입자}B\text{에 대해 (수평 방향)}: \quad 2m\ddot{x} = F.$$

(B에서는 무게와 수직항력(normal reaction)이 상쇄되고, 마찰(friction)은 없다.) 두 식을 더하면 F가 없어진다.

$$m\ddot{y} + 2m\ddot{x} = mg \quad \Longrightarrow \quad \ddot{y} + 2\ddot{x} = g.$$

두 입자는 $x = y = 0$인 정지 상태에서 출발한다. 한 번 적분하면 $\dot{y} + 2\dot{x} = gt$를 얻으며, $t = 0$에서 두 속도가 모두 영이므로 적분상수는 없다. 한 번 더 적분하면

$$y + 2x = \tfrac{1}{2}gt^2,$$

이고, 이번에도 적분상수가 없으므로 이것이 구하려던 결과이다.

> **생각해 보기** F는 계속 변하는 늘어난 길이(extension) $y - x$에 따라 달라지므로 우리는 F를 모른다. 그런데도 어떻게 무언가를 말할 수 있을까?

F는 전혀 필요하지 않다. 두 식에 알맞은 인수를 곱하면(여기서는 그냥 더하기만 하면) 장력이 서로 반대 부호로 나타난다. 결합 $y + 2x$는 운동량(momentum)과 비슷한 양 $my + 2mx$의 $1/m$배이고, 이 양을 변화시키는 외력은 A의 무게뿐이다.

시각 T에서 B의 속력

시각 $T = \sqrt{6a/g}$에서 입자 B는 모서리에 도달하므로 $x = a$이다. $\frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}g \cdot \frac{6a}{g} = 3a$이므로 첫 번째 부분에서

$$y + 2a = 3a \quad \Longrightarrow \quad y = a.$$

따라서 시각 T에서 용수철의 늘어난 길이는 $y - x = a - a = 0$이다. 용수철은 다시 자연 길이(natural length)가 되고, 탄성 에너지(elastic energy)를 전혀 저장하지 않는다.

시각 T에서 B와 A의 속력을 각각 u와 v라 하자. 한 번 적분한 관계식 $\dot{y} + 2\dot{x} = gt$에서 $t = T$일 때

$$v + 2u = gT = \sqrt{6ag}. \tag{1}$$

에너지. 탁자는 매끄럽고 용수철은 가벼우므로 역학적 에너지가 보존된다. 처음에는 두 입자가 모두 정지해 있고 용수철은 늘어나 있지 않다. 시각 T에서 A는 거리 a만큼 떨어졌고 용수철은 다시 늘어나 있지 않으므로, 잃은 위치 에너지 mga는 모두 운동 에너지가 되었다.

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(2m)u^2 = mga \quad \Longrightarrow \quad v^2 + 2u^2 = 2ga. \tag{2}$$

생각해 보기 식이 두 개이고 그중 하나가 이차식이다. 그렇다면 가능한 속력이 두 개라고 예상해야 하지 않을까?

(1)에서 얻은 $v = \sqrt{6ag} - 2u$를 (2)에 대입하면

$$\begin{aligned} 6ag - 4\sqrt{6ag}\,u + 4u^2 + 2u^2 &= 2ga \\ 6u^2 - 4\sqrt{6ag}\,u + 4ag &= 0 \\ 3u^2 - 2\sqrt{6ag}\,u + 2ag &= 0. \end{aligned}$$

판별식(discriminant)은 $4 \cdot 6ag - 4 \cdot 3 \cdot 2ag = 0$이므로, 이 이차식은 완전제곱식(perfect square)이고 근은 하나뿐이다.

$$(\sqrt{3}\,u - \sqrt{2ag})^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \sqrt{\frac{2ag}{3}}.$$

따라서 B가 모서리에 도달할 때의 속력은 요구한 대로 $\sqrt{2ag/3}$이다. (1)에서 $v = \sqrt{6ag} - 2\sqrt{2ag/3} = \sqrt{2ag/3}$도 성립한다. 그 순간 두 입자는 같은 속력으로 움직이며, 이는 용수철이 자연 길이에 있다는 사실과 잘 맞는다.

검산

- 중근(repeated root)에는 의미가 있다. 전체 "운동량" $v + 2u$가 고정되어 있을 때, 운동에너지 $\frac{1}{2}mv^2 + mu^2$는 $v = u$일 때 가장 작고, 여기서는 그 최솟값이 정확히 mga이다. 따라서 에너지 식과 (1)이 동시에 성립하려면 $u = v$일 수밖에 없고, 그러면 (1)에서 곧바로 $3u = \sqrt{6ag}$를 얻는다.
- 운동을 완전히 풀면(문제에서는 그렇게 하지 말라고 한다) $\omega T = 2\pi$를 얻는다. 여기서 $\omega^2 = 3\lambda/(2am)$이다. 즉 늘어난 길이는 정확히 한 번의 완전한 진동을 거쳐 다시 영으로 돌아온다. $a = 1.3\,\mathrm{m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 놓고 단계별 수치 적분을 하면 $x(T) = y(T) = a$이고 두 속력이 모두 $2.9143\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \sqrt{2ag/3}$로 같다.
- 차원(dimensions): $\sqrt{ag}$는 속력이고, $\sqrt{a/g}$는 시간이다.

흔한 실수

- 일반적으로 용수철에 탄성 에너지가 있다는 사실을 잊는 것. 이 논증은 시각 T에서 $x = y = a$여서 늘어난 길이가 영이 되기 때문에만 성립한다. 이 점을 명시적으로 보여야 한다.
- 에너지 식만 쓰고 그것을 u에 대해 풀려고 하는 것. 이 식에는 미지수가 두 개 있으므로 관계식 (1)도 필요하다.

STEP 너머

양 $my + 2mx$는 운동량처럼 행동한다. 내력(여기서는 용수철의 장력)은 그 안에서 상쇄되고, 오직 외력만이 이 양을 변화시킨다. 이것이 입자계 역학의 출발점이다. 일반적으로는 운동을 질량중심(centre of mass) 부분과 상대 운동 부분으로 나누는데, 여기서는 상대 좌표 $y - x$가 단진동(simple harmonic motion)을 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.