풀이

STEP III 2017, 문제 8

순수수학 • 부분합 공식(아벨 합)

> **STEP III 2017, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q8

핵심 아이디어

처음의 항등식(identity)은 부분적분(integration by parts)의 이산 버전, 곧 "부분합산(summation by parts)"이다. 이 항등식은 b의 차분이 들어 있는 합을 a의 차분이 들어 있는 합으로 바꾸어 준다. 이를 삼각함수의 합에 쓰려면 $b_{m+1} - b_m$이 원하는 항을 만들어 내도록 b_m을 고른다. 이때 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formula)이 사인이나 코사인의 차를 하나의 곱으로 바꾸어 준다. 그다음 a_m을 1 또는 m으로 잡으면 반대쪽은 쉬워진다.

풀이

항등식

$a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1$은 연쇄적으로 상쇄되는(telescoping) 합으로 쓸 수 있다.

$$a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1 = \sum_{m=1}^{n} (a_{m+1}b_{m+1} - a_mb_m).$$

각 괄호 안에서 a_mb_{m+1}을 더하고 빼면

$$a_{m+1}b_{m+1} - a_mb_m = a_m(b_{m+1} - b_m) + b_{m+1}(a_{m+1} - a_m).$$

이를 $m = 1, \ldots, n$에 대하여 더하고 정리하면 바로 구하는 항등식을 얻는다.

삼각함수 부분 전체에서 $\operatorname{cosec} \frac{1}{2}x$가 정의되도록 $\sin \frac{1}{2}x \neq 0$ (즉 x가 2π의 배수가 아님)이라고 가정한다.

소문항 (i)

$b_m = \sin mx$로 두고 $A = (m+1)x$, $B = mx$에 합을 곱으로 바꾸는 공식을 적용하면

$$b_{m+1} - b_m = \sin(m+1)x - \sin mx = 2\cos(m+\tfrac{1}{2})x \, \sin \tfrac{1}{2}x.$$

이제 모든 m에 대하여 $a_m = 1$로 두면 $a_{m+1} - a_m = 0$이므로 항등식의 마지막 합은 사라진다. 그러면 항등식은 다음과 같이 된다.

$$2\sin \tfrac{1}{2}x \sum_{m=1}^{n} \cos(m+\tfrac{1}{2})x = b_{n+1} - b_1 = \sin(n+1)x - \sin x.$$

$2\sin \frac{1}{2}x \neq 0$으로 나누면

$$\sum_{m=1}^{n} \cos(m+\tfrac{1}{2})x = \tfrac{1}{2}(\sin(n+1)x - \sin x)\operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}x,$$

이 되어 구하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

인수 m이 있으므로 $a_m = m$으로 두어 $a_{m+1} - a_m = 1$이 되게 하는 것이 자연스럽다. 그러면 $b_{m+1} - b_m$이 $\sin mx$의 상수배가 되어야 한다.

> **생각해 보기** b_m을 어떻게 골라야 $b_{m+1} - b_m$이 $\sin mx$의 상수배가 될까?

소문항 (i)에서는 $(m+1)x$와 mx에서의 두 사인의 차가 **중점** $(m+\frac{1}{2})x$에서의 코사인을 주었다. $\sin mx$를 얻으려면 두 각의 중점이 mx인 코사인의 차가 필요하므로 $b_m = \cos(m-\frac{1}{2})x$로 잡는다. $\cos A - \cos B = -2\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$ (문제의 첫 번째 참고 사항에서도 얻을 수 있다)를 이용하면

$$b_{m+1} - b_m = \cos(m+\tfrac{1}{2})x - \cos(m-\tfrac{1}{2})x = -2\sin mx \, \sin \tfrac{1}{2}x.$$

$S = \sum_{m=1}^{n} m \sin mx$라 하자. $a_m = m$일 때 항등식은 다음을 준다.

$$-2\sin \tfrac{1}{2}x \, S = (n+1)\cos(n+\tfrac{1}{2})x - \cos \tfrac{1}{2}x - \sum_{m=1}^{n} \cos(m+\tfrac{1}{2})x.$$

마지막 합은 정확히 소문항 (i)의 합이다. 이를 대입하고 양변에 $-2\sin \frac{1}{2}x$를 곱하면

$$4\sin^2 \tfrac{1}{2}x \, S = 2\sin \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x - 2(n+1)\cos(n+\tfrac{1}{2})x \, \sin \tfrac{1}{2}x + \sin(n+1)x - \sin x.$$

이제 두 곱을 간단히 한다.

- $2\sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x = \sin x$이고, 이는 $-\sin x$와 상쇄된다.

- $A = (n+\frac{1}{2})x$, $B = \frac{1}{2}x$로 두고 $2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$를 쓰면

$$2\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x \, \sin\tfrac{1}{2}x = \sin(n+1)x - \sin nx.$$

따라서

$$\begin{aligned} 4\sin^2\tfrac{1}{2}x \, S &= -(n+1)\left(\sin(n+1)x - \sin nx\right) + \sin(n+1)x \\ &= -n\sin(n+1)x + (n+1)\sin nx. \end{aligned}$$

$4\sin^2\frac{1}{2}x$로 나누면

$$\sum_{m=1}^{n} m\sin mx = \left(-\tfrac{n}{4}\sin(n+1)x + \tfrac{n+1}{4}\sin nx\right)\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}x,$$

이므로

$$p = -\frac{n}{4}, \qquad q = \frac{n+1}{4}.$$

검산

- $n = 1$일 때, $1-\cos x = 2\sin^2\frac{1}{2}x$를 이용하면 공식은 $\frac{1}{4}(2\sin x - \sin 2x)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sin x\,(1-\cos x)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x = \sin x$를 준다. 이는 하나뿐인 항 $1\cdot\sin x$와 같다.
- 수치로 확인하면, $n=3$, $x=1$일 때 $\sin 1 + 2\sin 2 + 3\sin 3 \approx 3.08343$이고 $\left(-\frac{3}{4}\sin 4 + \sin 3\right)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2} \approx 3.08343$으로 같다.
- 소문항 (ii)는 $\sum_{m=1}^{n}\cos mx$를 x에 대하여 미분해서도 구할 수 있으며, 그 결과는 $-S$이다. 이는 독립적인 검산으로 유용하다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $b_m = \cos mx$로 고르는 것: 이때 차분은 $\sin mx$가 아니라 $\sin(m+\frac{1}{2})x$의 상수배가 되어 방법이 막힌다.
- $\cos A - \cos B$의 부호 실수: 이는 음의 부호가 붙은 $-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$이다.
- $\sin\frac{1}{2}x \neq 0$으로 나누기 전에 이 조건을 밝히는 것을 잊는 것.

STEP 너머

부분합산(아벨 합(Abel summation))은 부분적분의 이산판 쌍둥이이며, 대학 1학년 해석학(analysis)에서 쉴 새 없이 쓰이는 도구이다. $\cos(m+\frac{1}{2})x$의 부분합(partial

sums)이 유계임을 보여 주는 소문항 (i)과 같은 부등식과 결합하면 디리클레(Dirichlet) 판정법(Dirichlet's test)을 증명할 수 있다. 예를 들어 $\sum \frac{\sin mx}{m}$은 모든 x에 대하여 수렴(converges)한다. 소문항 (ii)와 같은 합은 푸리에 급수(Fourier series)에도 나타나는데, 그곳에서는 이러한 닫힌 형태가 수렴을 연구하는 출발점이 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 아벨 합과 디리클레 판정법을 명료하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.