풀이

STEP III 2017, 문제 7

순수수학 • 타원의 접선

> **STEP III 2017, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q7

핵심 아이디어

매개변수(parameter) t를 쓰면 "T에서의 접선(tangent)이 (X, Y)를 지난다"는 조건이 t에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 된다. 각 근(root)은 하나의 접점(point of contact)에 대응하므로, 한 점에서 그을 수 있는 접선의 개수를 세는 일은 실근의 개수를 세는 일과 같고, 이것은 판별식(discriminant)의 문제이다. 소문항 (ii)에서 두 접점의 매개변수 p와 q는 바로 그 이차방정식의 두 근이므로, 그 합과 곱은 계수로부터 곧바로 얻어진다.

풀이

점이 타원 위에 있음

T의 좌표를 대입하면

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1 + 2t^2 + t^4}{(1+t^2)^2} = 1,$$

이므로 모든 실수 t에 대하여 T는 타원(ellipse) 위에 있다.

소문항 (i)

t에 대하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{-4at}{(1+t^2)^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{2b(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

이 둘을 나누는 대신($t = 0$일 때 곤란하다), 타원 위의 점 (x_0, y_0)에서의 표준적인 접선, 즉 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$을 이용한다. 이 접선의 법선 방향(normal direction) $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$은 위의 속도 벡터와 수직이다. 왜냐하면 $\frac{1-t^2}{a} \cdot (-4at) + \frac{2t}{b} \cdot 2b(1-t^2) = 0$이기 때문이다. 따라서 T에

서의 접선 L은

$$\frac{x(1-t^2)}{a(1+t^2)} + \frac{2ty}{b(1+t^2)} = 1 \iff bx(1-t^2) + 2aty = ab(1+t^2).$$

$(x, y) = (X, Y)$를 대입하고 t의 거듭제곱별로 정리하면

$$bX - bXt^2 + 2aYt - ab - abt^2 = 0 \iff (a+X)bt^2 - 2aYt + b(a-X) = 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

두 접선. 거꾸로 읽으면, 매개변수가 t인 점에서의 접선이 (X, Y)를 지날 필요충분조건은 t가 이 방정식을 만족하는 것이다. $X \neq -a$이고 $b \neq 0$이므로 t^2의 계수는 0이 아니고, 따라서 이 식은 진짜 이차방정식이며 판별식은

$$4a^2Y^2 - 4b^2(a+X)(a-X) = 4(a^2Y^2 - (a^2 - X^2)b^2).$$

$a^2Y^2 > (a^2 - X^2)b^2$이면 이 값은 양수이므로 서로 다른 두 실근 $t_1 \neq t_2$가 존재한다. 서로 다른 t의 값은 타원 위의 서로 다른 점을 준다(사상 $t \mapsto T$는 일대일(one-to-one)이다. $t = \tan\frac{\theta}{2}$로 두면 이것은 $-\pi < \theta < \pi$에 대한 익숙한 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$이다). 또한 타원의 접선은 타원과 접점에서만 만나므로, 서로 다른 접점은 서로 다른 접선을 준다. 따라서 (X, Y)를 지나는 서로 다른 두 접선이 존재한다.

? 생각해 보기 매개변수 t로 나타낼 수 없는 접선을 놓쳤을 가능성은 없을까?

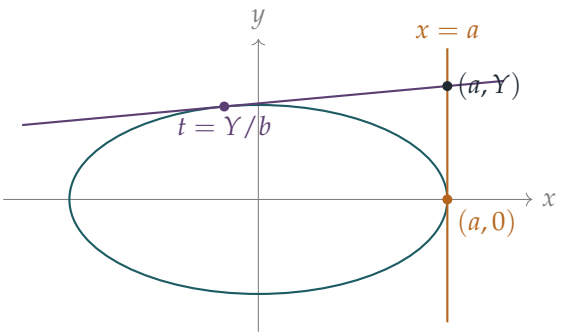
타원 위의 점 가운데 $(*)$의 꼴이 아닌 것은 $(-a, 0)$뿐이며($t \to \infty$일 때의 극한), 이 점에서의 접선은 $x = -a$이다. 이 직선이 (X, Y)를 지나는 것은 $X = -a$일 때뿐인데, 이 경우는 제외되어 있다. 따라서 이 이차방정식은 (X, Y)를 지나는 모든 접선을 빠짐없이 나타낸다.

해석. 조건을 $a^2b^2 > 0$으로 나누면

$$\frac{Y^2}{b^2} > 1 - \frac{X^2}{a^2} \iff \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} > 1,$$

이고, 이는 (X, Y)가 타원의 **바깥**에 있다는 뜻이다. 따라서 원의 경우와 마찬가지로, 타원 바깥의 임의의 점에서 타원에 두 접선을 그을 수 있다.

$X^2 = a^2$인 경우. 이때 조건은 $a^2Y^2 > 0$, 즉 $Y \neq 0$이 된다. 점은 수직선 $x = \pm a$ 중 하나 위에 있지만 꼭짓점(vertex) $(\pm a, 0)$은 아니다. 한 접선은 바로 수직선 $x = \pm a$ 자체로, 타원과 $(\pm a, 0)$에서 접한다. 다른 접선은 타원의 다른 곳에서 접한다. $X = a$이면 이차방정식은 $2abt^2 - 2aYt = 0$이 되고, 근은 $t = 0$(수직 접선)과 $t = Y/b \neq 0$이다. $X = -a$이면 $-2aYt + 2ab = 0$이 되어 $t = b/Y$를 얻고, 두 번째 접선은 빠져 있던 점 $(-a, 0)$에서의 접선인 $x = -a$이다. 그림은 $X = a$, $Y > 0$인 경우를 나타낸다.



따라서 $X^2 = a^2$일 때에도 결과는 여전히 성립한다. 즉 $Y \neq 0$일 때마다, 다시 말해 점이 타원 바깥에 있을 때마다 (X, Y)를 지나는 서로 다른 두 접선이 존재한다.

소문항 (ii)

P에서의 접선이 (X, Y)를 지나므로, 소문항 (i)에 의해 p는

$$(a + X)bt^2 - 2aYt + b(a - X) = 0,$$

의 근이고, q도 마찬가지이다. $X \neq -a$이므로 이것은 이차방정식이며, ($P \neq Q$이므로) $p \neq q$이다. 따라서 p와 q는 이 방정식의 두 근이다. 그러므로

$$pq = \frac{b(a - X)}{b(a + X)} = \frac{a - X}{a + X} \quad \Longrightarrow \quad (a + X)pq = a - X,$$

이 되어 원하는 결과를 얻고, 또한

$$p + q = \frac{2aY}{b(a + X)}.$$

마지막 부분

접선 $bx(1 - t^2) + 2aty = ab(1 + t^2)$에 $x = 0$을 대입하면 $2aty = ab(1 + t^2)$이다. 두 접선은 실제로 y축과 만나므로 $p, q \neq 0$이고($t = 0$에서의 접선은 $x = a$이다),

$$y_1 = \frac{b(1 + p^2)}{2p}, \qquad y_2 = \frac{b(1 + q^2)}{2q}.$$

$\frac{1+p^2}{p} = p + \frac{1}{p}$로 쓰면

$$y_1 + y_2 = \frac{b}{2}\left(p + q + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{b}{2}(p + q)\left(1 + \frac{1}{pq}\right) = \frac{b(p + q)(1 + pq)}{2pq}.$$

위의 결과로부터 $1 + pq = \frac{2a}{a + X}$이므로, $pq = \frac{a - X}{a + X} \neq 0$을 이용하면

$$y_1 + y_2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{2aY}{b(a + X)} \cdot \frac{2a}{a + X} \cdot \frac{a + X}{a - X} = \frac{2a^2Y}{(a + X)(a - X)} = \frac{2a^2Y}{a^2 - X^2}.$$

이 값을 $2b$와 같다고 놓고 $(a^2 - X^2)/(2a^2b)$($X^2 \neq a^2$이므로 0이 아니다)를 곱하면

$$\frac{Y}{b} = \frac{a^2 - X^2}{a^2} = 1 - \frac{X^2}{a^2} \iff \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y}{b} = 1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 따라서 교점은 $(\pm a, 0)$과 $(0, b)$를 지나는 포물선(parabola) 위에 있다.

검산

- $a = 2, b = 1, (X, Y) = (4, 1)$($4 + 1 > 1$이므로 바깥)이면 이차방정식은 $6t^2 - 4t - 2 = 0$이고, 근은 $t = 1$과 $t = -\frac{1}{3}$이다. 즉 $(0, 1)$과 $(1.6, -0.6)$에서의 접선이다. 두 접선 $y = 1$과 $2x - 3y = 5$는 실제로 $(4, 1)$을 지난다. 여기서 $pq = -\frac{1}{3} = \frac{2-4}{2+4}$이고 $p + q = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$으로, 공식이 예측한 대로이다.
- 중심 $(0, 0)$에서 판별식은 $-4a^2b^2 < 0$이다. 타원 안쪽의 점이므로 예상대로 접선이 없다.
- 무작위로 고른 여러 타원과 점 P, Q의 쌍에 대해 접선의 교점을 직접 구하여 컴퓨터로 확인하였다. pq, $p + q$, $y_1 + y_2$에 대한 공식이 모두 일치하였고, $y_1 + y_2 = 2b$일 때 교점은 $X^2/a^2 + Y/b = 1$을 만족하였다.

흔한 실수

- 기울기(gradient)를 $\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$로 구하면서, 접선이 수직이 되는 $t = 0$에서는 이 방법이 통하지 않는다는 것을 잊는 실수.
- $X = -a$일 때에도 $(a + X)bt^2 - 2aYt + b(a - X) = 0$을 이차방정식으로 취급하는 실수. 바로 이 때문에 $X^2 = a^2$인 경우를 따로 다루어야 한다.
- 두 근이 왜 **서로 다른** 두 직선을 주는지 설명하지 않고 "판별식이 양수이다"에서 멈추는 실수.

STEP 너머

원뿔곡선(conic)의 유리 매개화(rational parametrisation) $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$는 대수기하학(algebraic geometry)의 출발점이다. 유리점(rational point)을 하나 가진 원뿔곡선이 무한히 많은 유리점을 가지는 이유가 바로 이것이며, 피타고라스 세 쌍(Pythagorean triples)의 분류도 이에 바탕을 둔다. 바깥의 한 점에서 그은 두 접선은 **극선**(polar)이라는 개념과 사영기하학(projective geometry)으로 이어지는데, 사영기하학에서는 $t = \infty$에서

빠져 있던 곤란한 점이 평범한 점이 된다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 유형의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.