풀이

STEP III 2017, 문제 6

순수수학 • 치환적분

STEP III 2017, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

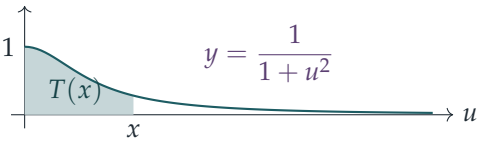
step.maths.org/questions/17-s3-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.2 절 **적분으로 삼각함수 세우기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/trig-from-integral.html

핵심 아이디어

역탄젠트(inverse tangent)를 오직 그 적분만으로 세워 나가므로, 모든 성질은 치환(substitution)에서 나와야 한다. 치환 $u \mapsto 1/u$는 구간 $(0, x)$와 $(1/x, \infty)$를 서로 맞바꾸고, 뫼비우스(Möbius) 치환 $v = \frac{u+a}{1-au}$는 미분소까지 포함한 피적분함수(integrand) $\frac{du}{1+u^2}$를 그대로 두므로 적분 구간의 끝값만 옮겨 놓는다. 마지막 소문항에서 옮겨진 끝값이 이미 알고 있는 값으로 되돌아오도록 수를 고르면, 풀 수 있는 방정식이 생긴다.

풀이



$T(x)$는 색칠한 부분의 넓이이고, T_∞는 $u \geq 0$에서 곡선 아래의 전체 넓이이다.

소문항 (i)

$T(x)$의 적분에 $u = 1/t$를 치환하면 $\mathrm{d}u = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$이고, u가 0부터 x까지 움직일 때 t는 ∞부터 $1/x$까지 줄어든다. 그러면

$$\begin{aligned} T(x) &= \int_{\infty}^{1/x} \frac{1}{1+t^{-2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{1/x}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = T_\infty - T(x^{-1}). \end{aligned}$$

(0에서 시작하는 적분은 T_∞가 유한하므로 제대로 정의된 적분(proper integral)이고, 따라서 구간을 나누는 것은 정당하다.) 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

도함수. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해 $u \neq a^{-1}$일 때

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2}{(1-au)^2}.$$

한편

$$1+v^2 = \frac{(1-au)^2+(u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2u^2+u^2+a^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

$1+u^2$로 나누면 $\dfrac{1+v^2}{1+u^2} = \dfrac{1+a^2}{(1-au)^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$이므로 원하는 결과를 얻는다.

덧셈정리. $a > 0$이고 $0 < x < \frac{1}{a}$라 하자. $0 \le u \le x$에서 $1-au \ge 1-ax > 0$이므로 v는 구간 전체에서 정의되고 연속이며, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} > 0$이므로 v는 $v(0) = a$에서 $v(x) = \frac{x+a}{1-ax}$까지 증가한다.

> **?** **생각해 보기** $x < \frac{1}{a}$라는 조건이 왜 중요한가?

x가 $\frac{1}{a}$에 이르면 v가 적분 구간 안에서 발산하게 되어 치환이 의미를 잃는다. $x < \frac{1}{a}$이면 이 치환은 $[0, x]$에서 매끄럽고 증가하는 변수 변환이다.

도함수에 대한 결과는 바로 $\dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{1}{1+v^2}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$를 뜻하므로

$$\begin{aligned} T(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} &= \int_a^{\frac{x+a}{1-ax}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} \\ &= \int_0^{\frac{x+a}{1-ax}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} - \int_0^a \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = T\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - T(a). \end{aligned}$$

여기서 T에 들어가는 두 값은 모두 양수이므로 모든 것이 잘 정의된다.

첫째 따름 결과. $X = \frac{x+a}{1-ax}$라 하자. 소문항 (i)을 x에, 이어서 a에 적용하면

$$T(x^{-1}) = T_\infty - T(x) = T_\infty - T(X) + T(a) = T_\infty - T(X) + T_\infty - T(a^{-1}),$$

즉 $T(x^{-1}) = 2T_\infty - T\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - T(a^{-1})$이다.

둘째 따름 결과. $b > 0$이고 $y > \frac{1}{b}$일 때 $x = \frac{1}{y}$, $a = \frac{1}{b}$로 놓는다. 그러면 $x > 0$, $a > 0$이고, $y > \frac{1}{b}$는 $x < b = \frac{1}{a}$와 같으므로 앞의 결과를 적용할 수 있다. 분자와 분모에 by를 곱하면

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{b}}{1 - \frac{1}{by}} = \frac{b+y}{by-1},$$

이고 $x^{-1} = y$, $a^{-1} = b$이므로

$$T(y) = 2T_\infty - T\left(\frac{y+b}{by-1}\right) - T(b).$$

소문항 (iii)

$T(\sqrt{3})$. 마지막 결과에서 $y = b = \sqrt{3}$으로 놓는다. $\sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 조건 $y > \frac{1}{b}$가 성립한다. 이때

$$\frac{y+b}{by-1} = \frac{2\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3},$$

이므로 $T(\sqrt{3}) = 2T_\infty - T(\sqrt{3}) - T(\sqrt{3})$, 즉 $3T(\sqrt{3}) = 2T_\infty$이고

$$T(\sqrt{3}) = \tfrac{2}{3}T_\infty.$$

먼저 $T(1)$. 소문항 (i)에 $x = 1$을 넣으면 $T(1) = T_\infty - T(1)$이므로 $T(1) = \frac{1}{2}T_\infty$이다.

> **생각해 보기** $x = a$일 때 $\frac{x+a}{1-ax}$가 1이 되게 하는 a의 값은 무엇인가?

$\frac{2a}{1-a^2} = 1$, 즉 $a^2 + 2a - 1 = 0$이어야 하고, 그 양의 근은 $a = \sqrt{2} - 1$이다.

$T(\sqrt{2}-1)$. 그러므로 덧셈정리에서 $x = a = \sqrt{2} - 1 > 0$으로 놓는다. 조건 $x < \frac{1}{a}$는 $\sqrt{2} - 1 < \sqrt{2} + 1$이므로 성립한다. $a^2 = 3 - 2\sqrt{2}$이므로

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(3-2\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)} = 1,$$

이고, 따라서 $T(\sqrt{2}-1) = T(1) - T(\sqrt{2}-1)$이므로

$$T(\sqrt{2}-1) = \tfrac{1}{2}T(1) = \tfrac{1}{4}T_\infty.$$

검산

물론 T는 사실 arctan이고 $T_\infty = \frac{\pi}{2}$이다. 풀이에서는 이를 쓸 수 없었지만 검산에는 얼마든지 쓸 수 있다: $\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$이고 $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$이다. 적분을 수치적으로 계산하면(심프슨 공식(Simpson's rule)) $T_\infty \approx 1.570796$, $T(\sqrt{3}) \approx 1.047198$, $T(\sqrt{2}-1) \approx 0.392699$로, $\frac{2}{3}T_\infty$와 $\frac{1}{4}T_\infty$에 일치한다. 소문항 (ii)의 덧셈정리(addition formula)는 $x = \tan A$, $a = \tan B$로 놓으면 익숙한 $\tan(A+B)$ 공식이 모습을 바꾼 것이다.

흔한 실수

- $u = 1/t$로 치환한 뒤 적분 구간의 위아래를 뒤집는 것을 잊는 것: $\mathrm{d}u = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$에서 나오는 음의 부호가 바로 $\int_{\infty}^{1/x}$를 $\int_{1/x}^{\infty}$로 바꿔 준다.
- 소문항 (iii)에서 $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$이나 arctan에 관한 사실을 슬쩍 쓰는 것: 문제에서 이를 금지하고 있으며, 핵심은 모든 것을 소문항 (i)과 (ii)에서 얻어 내는 것이다.
- 실제로 사용한 수에 대해 조건 $x < \frac{1}{a}$와 $y > \frac{1}{b}$를 확인하지 않는 것.

STEP 너머

함수를 적분으로 정의하고 그 정의에서 모든 성질을 이끌어 내는 것은 해석학(analysis) 강의에서 ln, exp, arctan, 심지어 π까지 엄밀하게 세우는 방법이다. 여기서는 π를 그냥 $2T_{\infty}$로 정의할 수도 있다. 치환 $v = \frac{u+a}{1-au}$는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이며, 이것이 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$를 보존한다는 사실은 원의 회전을 반영한다. 해석학 쪽으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를, 뫼비우스 변환의 기하학에 대해서는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.