풀이

# STEP III 2017, 문제 5

순수수학 • 극곡선

> **STEP III 2017, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q5

## 핵심 아이디어

곡선을 $\theta$를 매개변수(parameter)로 하여 매개변수 방정식으로 나타낸다: $x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\sin\theta$. 그러면 기울기(gradient)는 연쇄법칙(chain rule)으로 구할 수 있고, "직각으로 만난다"는 조건은 "기울기의 곱이 $-1$이다"가 된다. 마지막 부분에서는 곡선족 $r = a(1+\sin\theta)$가 $C$ 위의 모든 점을 지나므로, 직각 조건이 $C$ 전체에서 성립한다. 이로써 조건은 $f$에 대한 일계 미분방정식(first-order differential equation)이 된다.

## 풀이

### 기울기

곡선 위에서 $x = f(\theta)\cos\theta$이고 $y = f(\theta)\sin\theta$이다. 곱의 미분법(product rule)으로 $\theta$에 대하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta.$$

연쇄법칙을 쓰고, 분자와 분모를 $\cos\theta$로 나누면($\cos\theta \neq 0$이라 가정한다)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} = \frac{f'(\theta)\tan\theta + f(\theta)}{f'(\theta) - f(\theta)\tan\theta}.$$

### 직각으로 만나는 곡선

두 곡선이 만나는 점에서 두 곡선은 같은 $\theta$를 가진다. $t = \tan\theta$로 두고, 그 점에서의 값을 $f, f', g, g'$로 쓴다. 어느 접선(tangent)도 수직이 아니라면, 두 곡선이 수직일 필요충분조건

은 기울기의 곱이 $-1$인 것이다:

$$(f't + f)(g't + g) = -(f' - ft)(g' - gt).$$

양변을 전개하면 $f'gt$항과 $fg't$항이 소거되어 다음이 남는다.

$$f'g't^2 + fg + f'g' + fgt^2 = 0 \iff (1+t^2)(f'g' + fg) = 0.$$

$1 + t^2 = \sec^2\theta > 0$이므로 $f'(\theta)g'(\theta) + f(\theta)g(\theta) = 0$을 얻고, 이것이 보이려던 것이다.

> **생각해 보기** 한 접선이 수직이거나 $\cos\theta = 0$이어서 기울기나 $\tan\theta$가 존재하지 않으면 어떻게 하는가?

기울기 대신 방향벡터(direction vector)를 쓴다. $r = f(\theta)$의 접선의 방향은 $(f'\cos\theta - f\sin\theta,\ f'\sin\theta + f\cos\theta)$이고, $g$에 대해서도 마찬가지이다. 두 벡터의 스칼라곱(scalar product)은

$$(f'\cos\theta - f\sin\theta)(g'\cos\theta - g\sin\theta) + (f'\sin\theta + f\cos\theta)(g'\sin\theta + g\cos\theta) = f'g' + fg,$$

이다. 교차항이 소거되고 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$이기 때문이다. 따라서 수직 조건은 모든 경우에 같은 조건이다.

### $f(\theta)$ 구하기

$r = a(1 + \sin\theta)$에 대하여 $g'(\theta) = a\cos\theta$이다.

> **생각해 보기** 이 조건은 두 곡선이 만나는 점에서만 성립한다. 왜 $C$의 모든 점에서 이를 쓸 수 있는가?

$C$ 위의 임의의 점을 잡고, 그 각을 $\theta$라 하자. 단, $f(\theta) > 0$이고 $\sin\theta \neq -1$이다. $a = f(\theta)/(1+\sin\theta) > 0$으로 택하면 곡선족 가운데 같은 $\theta$에서 그 점을 지나는 곡선을 얻는다. 가정에 의해 이 곡선은 $C$와 직각으로 만나므로

$$f'(\theta)\, a\cos\theta + f(\theta)\, a(1+\sin\theta) = 0.$$

$a > 0$으로 나누면, 그러한 모든 $\theta$가 다음을 만족한다.

$$f'(\theta)\cos\theta + f(\theta)(1+\sin\theta) = 0.$$

양변에 $1 - \sin\theta$를 곱하고 $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$를 이용하면

$$\cos\theta\,[f'(\theta)(1-\sin\theta) + f(\theta)\cos\theta] = 0.$$

$\cos\theta \neq 0$인 곳에서는 괄호 안이 0이다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해 괄호 안의 식은 $f(\theta)/(1-\sin\theta)$의 도함수에 $(1-\sin\theta)^2$을 곱한 것이다:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{f(\theta)}{1-\sin\theta}\right) = \frac{f'(\theta)(1-\sin\theta) + f(\theta)\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2} = 0.$$

따라서 구간 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$에서 어떤 상수 $k$에 대하여 $f(\theta) = k(1-\sin\theta)$이다. (같은 방법으로, $f'/f = -(1+\sin\theta)/\cos\theta = -\cos\theta/(1-\sin\theta)$에서 변수분리(separation of variables)를 해도 된다.) 곡선이 $r = 4$, $\theta = -\frac{1}{2}\pi$를 지나므로, 연속성(continuity)에 의해 $k(1+1) = 4$이고, $k = 2$이다. $\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$에서도 같은 논증이 적용되고, $\theta = \frac{3}{2}\pi$는 $-\frac{1}{2}\pi$와 같은 방향이므로 역시 $k = 2$이다. 그러므로

$$\boxed{f(\theta) = 2(1-\sin\theta)}$$

이것은 또 하나의 심장형 곡선(cardioid)으로, $r = 2(1+\sin\theta)$를 $x$축에 대하여 대칭이동한 것이다.

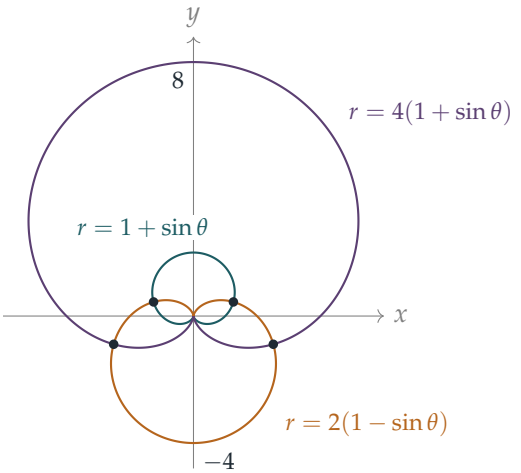
### 개형 그리기

곡선 $r = a(1+\sin\theta)$는 첨점(cusp)이 원점에 있고 $y$축에 대하여 대칭인 심장형 곡선이다. 위로는 $(0, 2a)$까지 올라가고 $x$축과 $(\pm a, 0)$에서 만난다. 곡선 $r = 2(1-\sin\theta)$는 같은 모양으로 아래쪽으로 열린 심장형 곡선이다: 첨점은 원점에 있고, $x$축과 $(\pm 2, 0)$에서 만나며, 아래로는 $(0, -4)$까지 내려간다.

교점은 $a(1+\sin\theta) = 2(1-\sin\theta)$를 풀어 구하며, 이로부터 $\sin\theta = \frac{2-a}{2+a}$를 얻는다:

- $a = 1$: $\sin\theta = \frac{1}{3}$, $r = \frac{4}{3}$이고, 교점은 $\left(\pm\frac{8\sqrt{2}}{9}, \frac{4}{9}\right)$이다;
- $a = 4$: $\sin\theta = -\frac{1}{3}$, $r = \frac{8}{3}$이고, 교점은 $\left(\pm\frac{16\sqrt{2}}{9}, -\frac{8}{9}\right)$이다.

세 곡선은 모두 원점도 지난다.



## 검산

- $\theta = 0$에서 곡선 $r = 2(1 - \sin\theta)$는 $(2, 0)$에 있고, $r = 2(1 + \sin\theta)$도 같은 점을 지난다. 그 점에서 $f = 2$, $f' = -2$, $g = 2$, $g' = 2$이므로 $f'g' + fg = -4 + 4 = 0$이 되어 예상대로이다.
- $\theta = -\frac{1}{2}\pi$에서 $f = 2(1 + 1) = 4$이므로 조건을 만족한다.
- $\left(\frac{8\sqrt{2}}{9}, \frac{4}{9}\right) \approx (1.257, 0.444)$에서의 접선들이 수직임을 컴퓨터로 확인하였고, 임의로 고른 여러 $a$ 값에 대해서도 접선들이 수직임을 확인하였다.

## 흔한 실수

- 직각 조건을 교점 하나에서만 사용하는 것. "모든 양수 $a$에 대하여"라는 조건의 핵심은, 그 덕분에 조건이 $C$의 모든 점에서 성립한다는 데 있다.
- $f(\theta)/(1 - \sin\theta)$가 $\theta = \frac{1}{2}\pi$에서 정의되지 않는다는 것을 잊고, 상수를 어디에서 정하는지 소홀히 하는 것.
- $r = 2(1 - \sin\theta)$를 위쪽으로 열린 모양으로 그리는 것: $\theta = -\frac{1}{2}\pi$에서 $r = 4$이므로 이 곡선은 주로 $x$축 아래에 놓인다.

## STEP 너머

한 곡선족과 모든 곳에서 직각으로 만나는 곡선족을 **직교 궤적**(*orthogonal trajectories*)의 쌍이라 한다. 여기서 심장형 곡선 $r = a(1 + \sin\theta)$와 $r = b(1 - \sin\theta)$가 그러한 쌍을 이룬다. 이 개념은 대학 1학년 미분방정식에 나오고, 물리학에서도 다시 등장하는데, 거기서는 전기력선이 등전위선(equipotentials)과 직각으로 만난다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 직교 궤적을 구하는 방법을 다룬다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 등각 사상(conformal map)이 어떻게 그러한 곡선족을 만들어 내는지 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.