풀이

STEP III 2017, 문제 4

순수수학 • 함수의 기하평균

> **STEP III 2017, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q4

핵심 아이디어

기하평균(geometric mean)은 보통의 평균에 지수함수를 취한 것일 뿐이다. 즉 $\ln F(y)$는 구간 $[0, y]$에서 $\ln f$의 평균값이다. 따라서 F의 모든 성질은 로그의 성질(밑변환(change of base), $\ln(fg) = \ln f + \ln g$)과 적분의 선형성(linearity)을 결합하여 얻어진다. (iv)의 역(converse)에서는 주어진 조건이 적분을 포함한 방정식이 되고, 이를 미분하면 간단한 미분방정식(differential equation)으로 바뀐다.

풀이

풀이 전체에서

$$\ln F(y) = \frac{1}{y}\int_0^y \ln f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (y > 0),$$

으로 쓴다. 이는 정의의 양변에 로그를 취한 것이다.

소문항 (i)

$a > 0$이고 $a \neq 1$이므로 $\log_a$가 정의되고 $\ln a \neq 0$이며, 밑변환 공식에 의해 $\log_a f(x) = \dfrac{\ln f(x)}{\ln a}$이다. 또한 임의의 실수 t에 대하여 $a^t = \mathrm{e}^{t\ln a}$이다. 따라서

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{y}\int_0^y \log_a f(x)\,\mathrm{d}x} &= \exp\left(\ln a \cdot \frac{1}{y}\int_0^y \frac{\ln f(x)}{\ln a}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{y}\int_0^y \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(y), \end{aligned}$$

이다. 여기서 상수 $\frac{1}{\ln a}$를 적분 밖으로 꺼내어 $\ln a$와 약분하였다. 이것이 구하는 결과이다. (조건 $a \neq 1$은 바로 $\ln a$로 나눌 수 있게 해 주는 조건이다.)

소문항 (ii)

$f(x) > 0$이고 $g(x) > 0$이므로 $h(x) > 0$이다. 따라서 H가 정의되고, $\ln h(x) = \ln f(x) + \ln g(x)$이다. 적분의 선형성에 의해

$$\ln H(y) = \frac{1}{y}\int_0^y (\ln f(x) + \ln g(x))\,\mathrm{d}x = \ln F(y) + \ln G(y) = \ln(F(y)G(y)).$$

ln은 일대일(one-to-one)이므로 $H(y) = F(y)G(y)$이다.

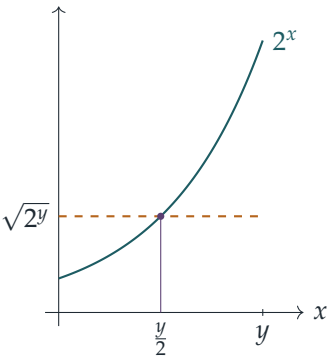
소문항 (iii)

이 경우 $f(x) = b^x > 0$이고 $\ln f(x) = x \ln b$이므로

$$\ln F(y) = \frac{1}{y}\int_0^y x \ln b\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\cdot\frac{y^2}{2}\ln b = \frac{y}{2}\ln b.$$

따라서 $F(y) = \mathrm{e}^{\frac{y}{2}\ln b} = b^{y/2} = \sqrt{b^y}$이고, 이것이 구하는 결과이다.

아래 그림은 $b = 2$일 때 이 결과가 무엇을 뜻하는지 보여 준다. 구간 $[0, y]$에서 2^x의 기하평균은 중점 $\frac{y}{2}$에서의 2^x의 값이다. $\ln 2^x$가 일차함수이고, 일차함수의 평균은 중점에서의 함숫값이기 때문이다.



소문항 (iv)

문제에서 암묵적으로 가정하듯이, f가 연속(continuous)이라고 가정한다. 그러면 적분이 존재하고 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)를 사용할 수 있다. $\phi(x) = \ln f(x)$로 놓자. $f(x) > 0$이므로 ϕ는 정의되고, 연속이다. 가정 $F(y) = \sqrt{f(y)}$에 로그를 취하면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{y}\int_0^y \phi(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\phi(y) \quad \text{즉,} \quad \int_0^y \phi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{y}{2}\phi(y) \qquad \text{모든} y > 0. \qquad (*)$$

? 생각해 보기 적분을 어떻게 없앨 수 있을까? 그리고 그렇게 해도 될까?

y에 대하여 미분한다. 미적분학의 기본정리에 의해 $(*)$의 좌변은 미분가능하고, 그 도함수는 $\phi(y)$이다. 따라서 우변도 미분가능하고, 그러므로 $y>0$에서 $\phi(y)=\frac{2}{y}\times$(좌변)도 미분가능하다. 우변에 곱의 미분법(product rule)을 써서 $(*)$를 미분하면

$$\phi(y)=\tfrac{1}{2}\phi(y)+\tfrac{y}{2}\phi'(y) \quad\Longrightarrow\quad y\phi'(y)-\phi(y)=0.$$

$y>0$이므로 y^2으로 나눌 수 있고, 몫의 미분법(quotient rule)으로 얻은 도함수 꼴임을 알아볼 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\phi(y)}{y}\right)=\frac{y\phi'(y)-\phi(y)}{y^2}=0.$$

따라서 구간 $y>0$에서 $\phi(y)/y$는 상수이고, 이를 k라 하자(평균값 정리(mean value theorem)에 의해, 어떤 구간에서 도함수가 0인 함수는 그 구간에서 상수이다). 그러므로 $\ln f(x)=kx$이고

$$f(x)=\mathrm{e}^{kx}=b^x, \qquad \text{여기서} b=\mathrm{e}^k>0.$$

이 식은 모든 $x>0$에서 성립한다. 한 점 $x=0$에서의 값은 어떤 적분에도 영향을 주지 않으며, 어차피 연속성에 의해 $f(0)=1=b^0$이다. (iii)과 함께 생각하면, 기하평균이 $\sqrt{f(y)}$인 함수는 정확히 b^x 꼴의 함수들임을 알 수 있다.

검산

- (iii)에서 $b=4$, $y=2$로 놓으면 $\ln F(2)=\frac{1}{2}\int_0^2 x\ln 4\,\mathrm{d}x=\ln 4$이므로 $F(2)=4=\sqrt{4^2}$이다. 수치 적분 결과도 이와 일치한다.
- (iv)에서 b^x 꼴이 아닌 함수, 예를 들어 $f(x)=3\cdot 2^x$를 시험해 보자. (ii)와 (iii)에 의해 $F(y)=3\cdot 2^{y/2}$인 반면 $\sqrt{f(y)}=\sqrt{3}\cdot 2^{y/2}$이므로, 당연히 조건이 성립하지 않는다. 위의 논증을 적용하면 $\phi(y)/y=\ln 2+\frac{\ln 3}{y}$가 되어 상수가 아니다.
- (i)과 (ii)는 임의의 양의 함수, y의 값, 그리고 1보다 작거나 큰 밑 a에 대하여 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- (iv)에서 $(*)$를 미분할 때 $\frac{y}{2}\phi(y)$에 곱의 미분법을 적용하지 않아 ϕ' 항을 통째로 놓치는 것.
- (iii)만으로 $f(x)=b^x$라고 결론 내리는 것. (iii)은 b^x가 그 성질을 가진다는 것을 보일 뿐, 다른 함수는 그 성질을 가지지 않는다는 것을 보이지는 않는다. (iv)는 그 역이며 별도의 논증이 필요하다.

▶ (i)에서 $a \neq 1$이 어디에 필요한지 언급하지 않는 것. 이 조건이 있어야 $\log_a$가 의미를 가지고 $\ln a \neq 0$이 된다.

STEP 너머

연속 기하평균은 $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$의 적분 버전이다. 오목함수(concave function) ln에 대한 옌센 부등식(Jensen's inequality)을 쓰면, 이 값이 보통의 평균 $\frac{1}{y}\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x$를 결코 넘지 않음을 보일 수 있는데, 이것이 연속 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)이다. (iv)는 함수방정식(functional equation)을 미분방정식으로 바꾸어 푸는 작은 예이며, 이때 미분가능성(differentiability)에 주의해야 한다. 해석학(analysis) 강의에서는 미적분학의 기본정리가 언제 이를 허용하는지 정확히 배운다. 엄밀한 배경 지식은 Abbott, *Understanding Analysis*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.