풀이

STEP III 2017, 문제 3

순수수학 • 다항식의 근

> **STEP III 2017, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q3

이 문제는 *Beyond STEP*의 6.4 절 **사차방정식 풀기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/quartic.html

핵심 아이디어

모든 다항식의 계수는 그 근들의 대칭함수(symmetric function)이므로, 삼차식(cubic)의 계수 A는 세 근의 합에 마이너스를 붙인 것이고, 그 합은 α, β, γ, δ에 대한 익숙한 대칭함수이다. 주어진 구체적인 사차식(quartic)에 대해서는 삼차식이 정수근을 가지므로 완전히 인수분해된다. 그러면 $\alpha\beta+\gamma\delta$의 값을 알게 되어 사차식을 두 이차식의 곱, 즉 α, β를 근으로 갖는 이차식과 γ, δ를 근으로 갖는 이차식으로 나눌 수 있고, 나머지 계수들이 이 두 인수를 결정한다.

풀이

A 구하기

풀이 전체에서 사차식에 대한 근과 계수의 관계(Vieta's relations)를 사용한다.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-p, \qquad \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=q,$$
$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-r, \qquad \alpha\beta\gamma\delta=s.$$

삼차식은 최고차항의 계수가 1(monic)이고 근이 $y_1=\alpha\beta+\gamma\delta$, $y_2=\alpha\gamma+\beta\delta$, $y_3=\alpha\delta+\beta\gamma$이므로

$$y^3+Ay^2+\cdots=(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3),$$

이고, y^2의 계수를 비교하면 $A = -(y_1 + y_2 + y_3)$이다. 그런데 $y_1 + y_2 + y_3$에는 서로 다른 두 근의 곱 여섯 개가 각각 정확히 한 번씩 들어 있으므로 그 값은 q이다. 따라서

$$A = -q.$$

소문항 (i)

$p = 0, q = 3, r = -6, s = 10$일 때 삼차식의 계수는

$$A = -3, \qquad pr - 4s = -40, \qquad 4qs - p^2 s - r^2 = 120 - 0 - 36 = 84,$$

이므로 삼차방정식은

$$y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = 0.$$

정수근은 모두 84의 약수이다. 작은 약수부터 대입해 보면 $y = 2$일 때 $8 - 12 - 80 + 84 = 0$이므로 $y - 2$가 인수이다.

$$y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = (y - 2)(y^2 - y - 42) = (y - 2)(y - 7)(y + 6).$$

근은 $2, 7, -6$이고, 그중 가장 큰 것은 7이므로

$$\alpha\beta + \gamma\delta = 7.$$

소문항 (ii)

전개하면

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta,$$

이고, 이는 두 근의 곱 여섯 개 전체의 합에서 $\alpha\beta$와 $\gamma\delta$를 뺀 것이다. 따라서

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = q - (\alpha\beta + \gamma\delta) = 3 - 7 = -4.$$

다음으로, $\alpha\beta$와 $\gamma\delta$는 합이 7이고 곱이 $\alpha\beta\gamma\delta = s = 10$이다. 그러므로 이 둘은 방정식

$$t^2 - 7t + 10 = (t - 5)(t - 2) = 0,$$

의 두 근이고, $\alpha\beta > \gamma\delta$이므로 $\alpha\beta = 5, \gamma\delta = 2$를 얻는다.

소문항 (iii)

$u = \alpha + \beta$라 하자. $p = 0$이므로 네 근의 합은 0이고, 따라서 $\gamma + \delta = -u$이다. 소문항 (ii)에 의해 $-u^2 = -4$이므로 $u = \pm 2$이다.

? **생각해 보기** u의 부호는 어느 쪽이 맞으며, 어떻게 알 수 있을까?

아직 r을 사용하지 않았다. 세 근의 곱 네 개를 둘씩 묶으면

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = \alpha\beta(\gamma+\delta) + \gamma\delta(\alpha+\beta) = 5(-u) + 2u = -3u.$$

이 값은 $-r = 6$과 같으므로 $u = -2$이다. (반대 부호라면 $r = +6$이 되어 다른 사차식이 된다.) 따라서

$$\alpha + \beta = -2, \quad \alpha\beta = 5, \qquad \gamma + \delta = 2, \quad \gamma\delta = 2.$$

그러므로 α, β는 $x^2 + 2x + 5 = 0$의 근으로 $x = -1 \pm 2\mathrm{i}$이고, γ, δ는 $x^2 - 2x + 2 = 0$의 근으로 $x = 1 \pm \mathrm{i}$이다. 따라서 사차방정식

$$x^4 + 3x^2 - 6x + 10 = (x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

의 근은

$$x = -1 + 2\mathrm{i}, \quad -1 - 2\mathrm{i}, \quad 1 + \mathrm{i}, \quad 1 - \mathrm{i}.$$

검산

- $(x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 2)$를 전개하면 x^3항이 소거되어 $x^4 + 3x^2 - 6x + 10$이 되는데, 이는 정확히 주어진 사차식이다.
- 이 근들에 대해 $\alpha\gamma + \beta\delta$와 $\alpha\delta + \beta\gamma$는 (순서와 상관없이) 삼차식의 나머지 두 근인 2와 -6이어야 한다. 이들의 합은 $q - 7 = -4 = 2 + (-6)$으로, 마땅히 그래야 하는 값이다.
- 공식 $A = -q$는 복소수 근을 무작위로 고른 사차식 천 개에 대해 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- $A = q$로 놓는 실수: y^2의 계수는 근의 합에 **마이너스**를 붙인 것이다.
- $u = \pm 2$에서 멈추고 두 경우를 모두 답으로 내는 실수: $r = -6$과 모순되지 않는 부호는 하나뿐이다.
- 실근을 기대하는 실수: 이 사차식은 모든 실수 x에 대해 양수이므로 네 근은 모두 허근이다.

STEP 너머

여기서 나온 삼차식은 사차식의 **분해 삼차식**(resolvent cubic)이며, 페라리(Ferrari)의 방법의 핵심이다. 즉 어떤 사차방정식이든 푸는 문제는 삼차방정식을 푼 다음 이차방정식들을

푸는 문제로 귀결된다. 이 방법이 왜 통하는지는 갈루아 이론(Galois theory)이 설명해 주는데, 이 이론은 근들의 치환(permutation)이 $\alpha\beta + \gamma\delta$ 같은 식에 어떻게 작용하는지를 연구한다(세 식 각각은 24개의 치환 가운데 여덟 개로 이루어진 부분군에 의해 고정된다). 이러한 아이디어를 공부하기 시작하기에는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.