풀이

STEP III 2017, 문제 2

순수수학 • 복소평면에서의 회전

STEP III 2017, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s3-q2

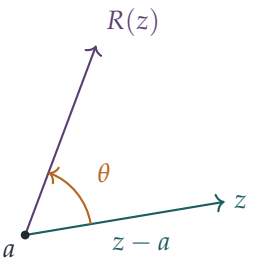
핵심 아이디어

점 a에 대한 회전(rotation)은 원점을 a로 옮겨서 생각하면 가장 쉽게 기술할 수 있다. 즉 a를 빼고, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$를 곱한 다음, 다시 a를 더한다. 따라서 모든 회전은 $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z + k$ 꼴이고, 역으로 이러한 사상은 ($\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \neq 1$이기만 하면) 그 고정점(fixed point)을 중심으로 하는 각 α만큼의 회전이다. 그러므로 SR가 무엇인지 알아내려면 두 식을 합성(composition)하고 고정점을 찾으면 된다. 반각(half-angle) 인수분해 $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = -2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\sin\frac{1}{2}\alpha$를 이용하면 답을 요구하는 꼴로 바꿀 수 있다.

풀이

소문항 (i)

중심 a에서 P로 가는 벡터는 $z - a$이다. a를 중심으로 시계 반대 방향으로 θ만큼 회전하면 이 벡터가 θ만큼 회전하는데, 복소수에서 이는 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$를 곱하는 것이다. $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1$이므로 길이는 변하지 않는다.



따라서 P의 상 w는 $w - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - a)$를 만족한다. 즉

$$w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + a(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),$$

이고, 이것이 보이려던 식이다. 같은 방법으로 $S(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}z + b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})$이다.

소문항 (ii)

R를 먼저 적용하고 그다음 S를 적용하면

$$\begin{aligned} SR(z) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + a(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right) + b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}). \end{aligned}$$

소문항 (i)에 의하여 c를 중심으로 하는 각 $\theta + \phi$만큼의 회전은 $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + c(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)})$이다. z의 계수(coefficient)는 이미 일치하므로, SR가 이 회전이 될 필요충분조건은 다음과 같다.

$$c(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}). \qquad (*)$$

? **생각해 보기** 괄호 $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$를 어떻게 반각의 사인으로 바꿀 수 있을까?

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}$를 인수로 묶어 내어 괄호를 대칭적인 꼴로 만든다.

$$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}) = -2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

이 식을 $\alpha = \theta + \phi, \theta, \phi$에 각각 적용하면 식 $(*)$는 다음과 같이 된다.

$$-2\mathrm{i}\,c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}\sin\tfrac{1}{2}(\theta + \phi) = -2\mathrm{i}\,a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\mathrm{i}\,b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\tfrac{1}{2}\phi.$$

양변을 $-2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}$(결코 0이 아니다)로 나누면 다음을 얻는다.

$$c\sin\tfrac{1}{2}(\theta + \phi) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\tfrac{1}{2}\theta + b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\sin\tfrac{1}{2}\phi.$$

$\theta + \phi \neq 2n\pi$이면 $\sin\frac{1}{2}(\theta + \phi) \neq 0$이므로 이 식은 c를 유일하게 결정하고, 그 c에 대하여 사상 SR는 c를 중심으로 하는 각 $\theta + \phi$만큼의 회전이다. 이것이 보이려던 결과이다. (이 조건은 중요하다. $\sin\frac{1}{2}(\theta + \phi) = 0$이면 일반적으로 회전의 중심이 될 고정점이 존재하지 않는다.)

$\theta + \phi = 2\pi$인 경우. 이때 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)} = 1$이고 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$이므로

$$\begin{aligned} SR(z) &= z + a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + b(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) \\ &= z + a(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - 1) + b(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) \\ &= z + (b - a)(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}). \end{aligned}$$

따라서 SR는 $(b-a)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$만큼의 **평행이동**(translation)이고, 이동 거리는 $2|b-a||\sin\frac{1}{2}\theta|$이다. $a=b$일 때(같은 점을 중심으로 θ만큼 회전한 다음 $2\pi-\theta$만큼 회전하는 경우)나 θ가 2π의 배수일 때 이것은 항등변환(identity)이다. 그 밖의 경우에는 고정점이 없는 진짜 평행이동이다.

소문항 (iii)

SR의 식에서 (a,θ)와 (b,ϕ)의 역할을 바꾸면

$$RS(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z+b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})+a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

두 사상 모두 z에 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}$를 곱하므로, $RS=SR$일 필요충분조건은 상수항이 일치하는 것이다. 두 사상의 차는

$$\begin{aligned}SR(z)-RS(z)&=a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-1)+b(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\\&=(b-a)(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}).\end{aligned}$$

곱이 0이 되는 것은 어떤 인수가 0일 때뿐이므로, $RS=SR$일 필요충분조건은 다음 중 하나가 성립하는 것이다.

- $a=b$(두 회전의 중심이 같다), 또는
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=1$, 즉 θ가 2π의 배수여서 R가 항등변환인 경우, 또는
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}=1$, 즉 ϕ가 2π의 배수여서 S가 항등변환인 경우.

말로 하면, 진짜 회전 두 개는 중심이 같을 때에만 교환 가능하다(commute).

검산

- $a=b$이면 (ii)의 식은 $c\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)=a\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\frac{1}{2}\theta+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\sin\frac{1}{2}\phi\big)$가 되고, 괄호를 전개하면 $\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\phi+\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\phi=\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$(허수부는 상쇄된다)이므로 $c=a$이다. 당연히 그래야 한다.
- $\phi=0$(S가 항등변환)이면 $c\sin\frac{1}{2}\theta=a\sin\frac{1}{2}\theta$이므로 $c=a$이다.
- $a=0$, $b=1$, $\theta=\phi=\frac{1}{2}\pi$로 놓자. 그러면 $R(z)=\mathrm{i}z$, $S(z)=\mathrm{i}z+1-\mathrm{i}$이므로 $SR(z)=-z+1-\mathrm{i}$이고, 이는 $\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$를 중심으로 하는 반 바퀴 회전이다. 공식에 따르면 $c\cdot 1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$이다. 일치한다.
- 세 결과 모두 무작위로 고른 수천 개의 중심, 각, 점에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다. 이때 공식을 쓰지 않고 (절댓값과 편각을 이용해) 기하적으로 회전시켰으며, 오차는 10^{-12} 미만이었다.

흔한 실수

- 합성 순서를 거꾸로 하는 것: SR는 R를 먼저 적용한다는 뜻이므로 $R(z)$를 S에 대입한다.
- $1 - e^{i(\theta+\phi)}$로 나누면서, 이것이 0이 아닌 까닭이 바로 $\theta + \phi \neq 2n\pi$이기 때문임을 밝히지 않는 것.
- (iii)에서 한 회전이 항등변환인 자명한 경우를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

$|\alpha| = 1$인 사상 $z \mapsto \alpha z + \beta$는 정확히 평면의 방향을 보존하는 등거리변환(orientation-preserving isometry)이며, 이들은 군(group)을 이룬다. 즉 회전과 평행이동을 합친 이 모임은 합성에 대하여 닫혀 있다. 소문항 (iii)은 이 군이 가환(commutative)이 아니라는 사실의 작은 예이며, 교환자(commutator) $RSR^{-1}S^{-1}$는 평행이동임이 밝혀진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈에 대한 이러한 기하적 관점을 아름답게 전개하고, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 군론을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.