풀이

STEP III 2017, 문제 11

역학 • 운동량 보존

> **STEP III 2017, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q11

이 문제는 *Beyond STEP*의 10.3 절 **로켓과 대포**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/rockets.html

핵심 아이디어

계에 작용하는 수평 방향의 외력이 없으므로, 매번 발사할 때마다 수평 방향 운동량(momentum)이 보존된다. 지면에 대한 속력이 $v - V$라는 이상해 보이는 조건은 사실 간단한 내용을 말하고 있다. 발사체는 언제나 **트럭에 대해** 속력 v로 떠난다는 것이다. 운동 에너지(kinetic energy)는 매번 처음부터 모두 다시 계산하지 말고, $(*)$를 이용해 한 번의 발사에서 생기는 에너지 변화를 간단히 한 다음 모두 더한다.

풀이

트럭, 포, 발사체를 한 직선 위에서 움직이는 입자로 모형화하고, 앞쪽 방향(트럭이 움직이는 방향)을 양의 방향으로 잡는다. 트럭의 속력이 V일 때 발사된 발사체의 속도는 $-(v - V) = V - v$, 즉 트럭에 대한 상대 속도가 $-v$이다. 발사는 계 내부의 작용이고 궤도는 매끄러우므로, 각 발사에서 전체 수평 운동량이 보존된다.

소문항 (i)

발사 전에는 모든 것이 정지해 있으므로 운동량은 0이다. $V = 0$이므로 각 발사체는 속도 $-v$로 떠나고, 트럭(질량 M)은 속력 u로 앞으로 움직인다.

$$Mu - nmv = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{nmv}{M}.$$

계는 처음에 운동 에너지가 없었으므로, 얻은 에너지는

$$K = \tfrac{1}{2}Mu^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{n^2m^2v^2}{M} + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}nmv^2\left(1 + \frac{nm}{M}\right),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

r번째 발사를 생각하자. 발사 직전에 트럭에는 아직 발사되지 않은 발사체 $n-r+1$개가 실려 있으므로, 움직이는 질량은 $M+(n-r+1)m$이고 속력은 u_{r-1}이다. 발사 직후에는 질량 $M+(n-r)m$이 속력 u_r로 움직이고, 질량 m인 발사체 하나의 속도는 $u_{r-1}-v$이다. 앞서 발사된 발사체들은 영향을 받지 않으므로 고려하지 않아도 된다.



운동량 보존에 의해

$$\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1} = \big(M+(n-r)m\big)u_r + m(u_{r-1}-v).$$

좌변을 $\big(M+(n-r)m\big)u_{r-1} + mu_{r-1}$로 쓰면 mu_{r-1} 항이 소거되어

$$\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv, \qquad \text{따라서} \qquad u_r - u_{r-1} = \frac{mv}{M+(n-r)m},$$

이 남고, 이것이 $(*)$이다.

$r=1,\dots,n$에 대해 $(*)$를 모두 더하면 좌변은 망원급수(telescoping sum)처럼 소거되고 $u_0=0$이므로

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{mv}{M+(n-r)m}.$$

각 분모는 $M+(n-r)m \geq M$을 만족하므로 각 항은 많아야 $\frac{mv}{M}$이다. $r=1$일 때는 $n>1$이어서 $(n-1)m>0$이므로 부등식이 엄격하게 성립한다. 따라서

$$u_n < n\cdot\frac{mv}{M} = u.$$

? 생각해 보기 한 발씩 발사하는 것이 왜 더 불리할까?

초기의 발사에서 포는 트럭뿐 아니라 아직 실려 있는 모든 발사체까지 밀어야 하므로, 각 발사가 주는 속력 증가가 더 작다. 동시 발사에서 한 발이 차지하는 몫과 같은 것은 $r=n$인 항(아무것도 실려 있지 않은 마지막 발사)뿐이다.

소문항 (iii)

r번째 발사에서 속도가 바뀌는 것은 (남은 짐을 실은) 트럭과 방금 발사된 발사체뿐이다. 따라서

$$\begin{aligned} K_r - K_{r-1} &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)u_r^2 + \tfrac{1}{2}m(u_{r-1}-v)^2 - \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)(u_r^2-u_{r-1}^2) + \tfrac{1}{2}m\big[(v-u_{r-1})^2-u_{r-1}^2\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1})(u_r+u_{r-1}) + \tfrac{1}{2}m(v^2-2vu_{r-1}). \end{aligned}$$

$(*)$에 의해 $\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv$이므로 첫째 항은 $\frac{1}{2}mv(u_r+u_{r-1})$이다. 그러므로

$$\begin{aligned} K_r - K_{r-1} &= \tfrac{1}{2}mvu_r + \tfrac{1}{2}mvu_{r-1} + \tfrac{1}{2}mv^2 - mvu_{r-1} \\ &= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_r-u_{r-1}), \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

이 식을 $r=1,\dots,n$에 대해 더하고 $K_0=0$, $u_0=0$을 이용하면 양변이 모두 연쇄적으로 소거되어

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_n-u_0) = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n.$$

마지막으로 소문항 (i)과 비교하자. $u = nmv/M$이므로

$$K = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{n^2m^2v^2}{M} = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmv\,u.$$

소문항 (ii)에서 $u_n < u$이고, $u>0$이며 $n>1$이므로 $u<nu$이다. $mv>0$이므로

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n < \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu < \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmvu = K.$$

따라서 $K_n < K$이다. 즉, 한 발씩 발사하면 방출되는 운동 에너지가 더 적다.

검산

- $n=3, M=10, m=1, v=1$로 두자. 그러면 $u=0.3$이고, $(*)$에서 $u_3 = \frac{1}{12}+\frac{1}{11}+\frac{1}{10} = \frac{181}{660} \approx 0.274$를 얻는데, 예상대로 더 작다. 에너지는 $K=1.95$, $K_3 = \frac{2161}{1320} \approx 1.637$이다.
- n, M, m, v를 무작위로 수천 번 골라 각 발사 직후 모든 물체의 운동량과 운동 에너지를 직접 계산해 보면, $(*)$ 및 K_n의 공식과 정확히 일치한다. 이는 컴퓨터로 확인하였다.
- 극한의 경우: $m \ll M$이면 $(*)$의 모든 항이 mv/M에 가까우므로 $u_n \approx u$이고, 두 에너지 모두 $\frac{1}{2}nmv^2$에 가깝다. 트럭이 매우 무거우면 발사 방식은 거의 상관이 없다.

흔한 실수

- 발사되지 않은 발사체가 트럭과 함께 움직인다는 것을 잊고, r번째 발사 전의 질량으로 $M + (n - r + 1)m$ 대신 M을 쓰는 실수.
- 발사체의 속도를 $u_{r-1} - v$ 대신 $-v$로 두는 실수. 문제에서 정한 것은 지면에 대한 속력 $v - V$이지 v가 아니다.
- $K_r - K_{r-1}$에 이전 발사체들의 운동 에너지를 포함하는 실수. 이들은 영향을 받지 않으므로 소거된다.

STEP 너머

이 문제는 로켓 운동의 이산적인 형태이다. n번의 발사를 연속적인 배기 가스의 흐름으로 바꾸면 u_n에 대한 합이 적분이 되어 치올콥스키 로켓 방정식(Tsiolkovsky rocket equation) $\Delta u = v \ln(m_0/m_1)$을 얻는다. 로켓은 한 발씩 발사하는 트럭과 같은 처지에 있다. 연료를 한 순간에 모두 태울 수 없으므로, 소문항 (ii)에서 밝혀진 대가를 치르는 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량이 변하는 계와 로켓을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.