풀이

STEP III 2017, 문제 10

역학 • 회전하는 강체

> **STEP III 2017, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q10

핵심 아이디어

입자가 미끄러지지 않는 동안 막대와 입자는 하나의 강체(rigid body)로서 경첩(hinge)을 축으로 함께 회전하므로, 에너지 보존(conservation of energy)으로부터 곧바로 $\dot{\theta}$를 얻고, 이를 미분하면 $\ddot{\theta}$를 얻는다. 이때 입자는 P를 중심으로 하는 원 위를 움직이므로, 그 가속도는 익숙한 지름 방향(radial) 성분과 횡방향(transverse) 성분을 가진다. 입자 하나에 대한 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙(Newton's second law)을 막대 방향과 막대에 수직인 방향으로 분해하면 마찰력(friction)과 수직항력(normal reaction)을 얻고, 마찰력이 수직항력의 μ배에 이를 때 미끄러짐(slipping)이 시작된다.

풀이

에너지 방정식

입자는 질점으로, 경첩은 매끄러운 것으로 모형화한다. 균일한 막대의 끝점 P에 대한 관성모멘트(moment of inertia)는 $\frac{1}{3}m(3a)^2 = 3ma^2$이고, P로부터 거리 ℓ에 있는 입자는 $m\ell^2$만큼 기여한다. 미끄러짐이 없는 동안 이 계는 각속도(angular speed) $\dot{\theta}$로 P를 축으로 회전하는 강체이며, 그 운동 에너지(kinetic energy)는

$$\tfrac{1}{2}\left(3ma^2 + m\ell^2\right)\dot{\theta}^2.$$

이다. 막대가 θ만큼 회전했을 때, (P로부터 거리 $\frac{3}{2}a$에 있는) 막대의 중심은 $\frac{3}{2}a\sin\theta$만큼 내려오고 입자는 $\ell\sin\theta$만큼 내려온다. 경첩의 반작용력은 일을 하지 않으며(작용점이 고정되어 있으므로), 마찰력과 수직항력은 계의 내력이므로 미끄러짐이 없을 때 알짜 일을 하지 않는다. 정지 상태에서 출발하므로 에너지 보존에 의해

$$\tfrac{1}{2}m\left(3a^2 + \ell^2\right)\dot{\theta}^2 = mg\left(\tfrac{3}{2}a + \ell\right)\sin\theta,$$

이고, 양변에 $2/m$를 곱하면

$$(3a^2 + \ell^2)\dot{\theta}^2 = g(3a + 2\ell)\sin\theta,$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

각가속도

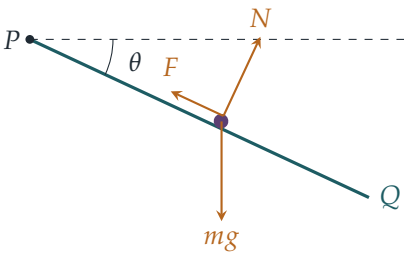
t에 대하여 미분하면

$$2(3a^2 + \ell^2)\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = g(3a + 2\ell)\cos\theta\,\dot{\theta}.$$

이다. $t > 0$이면 $\dot{\theta} \neq 0$이므로 양변을 $2\dot{\theta}$로 나눌 수 있다($t = 0$에서의 결과는 연속성(continuity)에 의해, 또는 P에 대한 모멘트를 직접 취하여 얻는다).

$$\ddot{\theta} = \frac{g(3a + 2\ell)\cos\theta}{2(3a^2 + \ell^2)}.$$

입자에 작용하는 힘



막대는 수평선 아래로 각 θ를 이루며 놓여 있다. 막대는 입자를 막대에 수직인 수직항력 N(입자가 막대 위에 놓여 있으므로 막대에서 멀어지는 방향)과 막대 방향의 마찰력 F로 미는데, F는 P를 향해 작용한다고 하자. 입자는 P를 중심으로 하는 반지름 ℓ인 원 위를 움직이므로, 그 가속도는 θ가 증가하는 방향(아래쪽, 막대 윗면에서 멀어지는 방향)으로 막대에 수직인 성분 $\ell\ddot{\theta}$와, 막대를 따라 P를 향하는 성분 $\ell\dot{\theta}^2$을 가진다.

막대에 수직이고 θ가 증가하는 방향으로, 무게의 성분은 $mg\cos\theta$이고 N은 반대 방향으로 작용한다.

$$mg\cos\theta - N = m\ell\ddot{\theta}.$$

막대를 따라 P를 향하는 방향으로, 무게의 성분은 $-mg\sin\theta$이다(무게는 입자를 P에서 멀어지게 당긴다).

$$F - mg\sin\theta = m\ell\dot{\theta}^2.$$

수직항력

위에서 구한 $\ddot{\theta}$를 이용하면

$$N = mg\cos\theta - m\ell\ddot{\theta} = mg\cos\theta\left(1 - \frac{\ell(3a+2\ell)}{2(3a^2+\ell^2)}\right)$$
$$= mg\cos\theta\,\frac{6a^2+2\ell^2-3a\ell-2\ell^2}{2(3a^2+\ell^2)} = \frac{3mga(2a-\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

이다. $\ell < 2a$이므로 인수 $2a-\ell$은 양수이고, θ가 예각이면 $\cos\theta > 0$이다. 따라서 $N > 0$이다. 특히 θ가 예각인 동안 수직항력은 0이 아니고, 입자는 막대와 접촉한 상태를 유지한다.

미끄러지기 시작하는 순간

두 번째 방정식과 에너지 방정식으로부터

$$F = mg\sin\theta + m\ell\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta\left(1 + \frac{\ell(3a+2\ell)}{3a^2+\ell^2}\right)$$
$$= mg\sin\theta\,\frac{3a^2+3a\ell+3\ell^2}{3a^2+\ell^2} = \frac{3mg(a^2+a\ell+\ell^2)\sin\theta}{3a^2+\ell^2}.$$

이다. 이 값은 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$에서 양수이므로, 가정한 대로 마찰력은 실제로 P를 향해 작용한다. 마찰력이 없다면 입자는 막대를 따라 바깥쪽으로 미끄러질 것이다.

생각해 보기 미끄러짐의 조건이 부등식이 아니라 $F = \mu N$인 이유는 무엇인가?

입자가 막대에 붙어 있는 동안 마찰력은 μN 이하의 어떤 힘이든 제공할 수 있으므로, $F \le \mu N$이어야 한다. $\theta = 0$에서는 $F = 0 < \mu N$이다. θ가 증가함에 따라 F는 ($\sin\theta$처럼) 커지고 N은 ($\cos\theta$처럼) 작아지므로, $\tan\theta$의 양수배인 F/N은 꾸준히 증가한다. 입자는 처음으로 $F = \mu N$이 되는 각에서 미끄러지기 직전 상태가 된다.

$$\frac{3mg(a^2+a\ell+\ell^2)\sin\theta}{3a^2+\ell^2} = \mu\,\frac{3mga(2a-\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

$3mg/(3a^2+\ell^2)$를 약분하고 $\cos\theta \neq 0$으로 나누면

$$\tan\theta = \frac{\mu a(2a-\ell)}{2(\ell^2+a\ell+a^2)},$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

$\ell > 2a$인 경우

N에 대한 식은 입자가 막대와 함께 움직인다고 가정하여 유도한 것이다. $\ell > 2a$이면 이 식은 $\theta = 0$에서 $N < 0$을 주는데, 이는 불가능하다. 막대는 입자를 밀 수만 있고 당길 수는 없기 때문이다. 따라서 입자는 놓는 순간조차 막대와 함께 움직일 수 없다.

실제로 어떤 일이 일어나는지 보기 위해 막대만 따로 생각하자. 놓는 순간 P에 대한 모멘트를 취하면

$$3ma^2\ddot{\theta} = mg \cdot \tfrac{3}{2}a \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{g}{2a},$$

이므로, 입자 바로 아래에 있는 막대 위의 점은 아래 방향 가속도 $\ell\ddot{\theta} = \frac{\ell}{2a}g$로 움직이기 시작하며, 이는 $\ell > 2a$일 때 g보다 크다. 막대는 입자가 자유 낙하할 수 있는 것보다 더 빨리 떨어져 나간다. 따라서 놓는 순간 입자는 막대에서 떨어지고(둘 사이의 반작용력은 0이다) 중력만 받으며 자유 낙하하기 시작하고, 막대는 홀로 아래로 회전한다.

검산

- 계 전체에 대해 P에 대한 모멘트를 취하면 $(3ma^2 + m\ell^2)\ddot{\theta} = mg\cos\theta\,(\frac{3}{2}a + \ell)$이 되어, 에너지 방정식을 미분하여 얻은 것과 같은 $\ddot{\theta}$를 얻는다.
- 경계 경우 $\ell = 2a$는 두 그림 모두와 들어맞는다. 놓는 순간 $N = 0$이고, 거리 $2a$에 있는 막대 위의 점은 정확히 g의 가속도로 움직이기 시작한다.
- $a = \ell = 1$, $\mu = 1$이면 미끄러지는 각은 $\tan\theta = \frac{1}{6}$을 만족하고, 그 각에서 위의 식들은 $F/N = 6\tan\theta = 1 = \mu$를 준다. N과 F에 대한 식은 컴퓨터로도 확인하였는데, 운동을 수치적으로 단계별로 계산하고 입자의 위치로부터 가속도를 직접 구하는 방식으로 하였다.

흔한 실수

- 경첩에 대한 관성 모멘트 대신 중심에 대한 관성 모멘트 $\frac{1}{12}m(3a)^2$을 사용하는 실수. 길이 L인 막대의 끝점에 대한 관성 모멘트는 $\frac{1}{3}mL^2$이다.
- 마찰력 방정식에서 구심(centripetal) 항 $m\ell\dot{\theta}^2$을 빠뜨리는 실수. 바로 이 항 때문에 분자가 a^2이 아니라 $a^2 + a\ell + \ell^2$이 된다.
- 수직 방향 방정식에서 $\ell\ddot{\theta}$의 부호를 잘못 잡는 실수. 막대는 입자에서 멀어지는 방향으로 가속하므로, N은 $mg\cos\theta$보다 큰 것이 아니라 작다.

STEP 너머

마지막 부분은 고전적인 놀라운 결과이다. 경첩에 연결되어 넘어지는 막대 위의 한 점은 g보다 빠르게 가속할 수 있으며, 그래서 넘어지는 자의 끝 가까이에 놓은 동전(또는 무너지는 굴뚝)은 뒤처지게 된다. N과 F 같은 구속력(constraint forces)을 구하는 체계적인 방법은 운동 방정식을 극좌표(polar coordinates)로 쓰는 것이며, 나중에 배우는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)은 이러한 힘을 전혀 쓰지 않고 운동을 구하는 방법을 보여 준

다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 회전과 이러한 극좌표 가속도를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.