풀이

# STEP III 2017, 문제 1

순수수학 • 망원급수를 이용한 한계

> **STEP III 2017, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q1

## 핵심 아이디어

(i)의 항등식은 이항계수(binomial coefficient)의 역수 각각을 상수와 연속한 두 항의 차(difference)의 곱으로 나타내므로, 합이 망원급수(telescoping series)처럼 소거된다. (ii)에서 $1/n^3$은 합을 구하기 까다롭지만 이항계수의 역수는 그렇지 않다. $\binom{n+1}{3}$과 $\binom{n+2}{5}$는 $n$에 대한 다항식으로 각각 $n^3$과 $n^5$의 상수배처럼 행동하므로, (i)을 이용해 정확히 합을 구할 수 있는 식들 사이에 $1/n^3$을 가둔다.

## 풀이

### 소문항 (i)

$\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}$로 쓰자. 그러면

$$\begin{aligned}\frac{1}{\binom{n+r-1}{r}} - \frac{1}{\binom{n+r}{r}} &= \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r-1)!} - \frac{r!\,n!}{(n+r)!} \\ &= \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r)!}[(n+r)-n] = \frac{r\cdot r!\,(n-1)!}{(n+r)!},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $(n+r)! = (n+r)\,(n+r-1)!$과 $n! = n\,(n-1)!$을 이용하여 공통인수 $r!\,(n-1)!/(n+r)!$을 묶어 냈다. 양변에 $\frac{r+1}{r}$을 곱하면

$$\frac{r+1}{r}\left(\frac{1}{\binom{n+r-1}{r}} - \frac{1}{\binom{n+r}{r}}\right) = \frac{(r+1)!\,(n-1)!}{(n+r)!} = \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}},$$

을 얻는다. $(n+r)-(r+1) = n-1$이기 때문이다. 이것이 구하는 항등식이다.

**합.** $a_n = 1/\binom{n+r-1}{r}$로 놓으면 항등식은 $1/\binom{n+r}{r+1} = \frac{r+1}{r}(a_n - a_{n+1})$이 된다. $n=1$부터 $N$까

지 더하면 첫 항과 마지막 항을 제외한 모든 항이 소거된다.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}} = \frac{r+1}{r}(a_1 - a_{N+1}) = \frac{r+1}{r}\left(1 - \frac{1}{\binom{N+r}{r}}\right),$$

$a_1 = 1/\binom{r}{r} = 1$이기 때문이다. $N \to \infty$일 때 ($r \geq 1$이면) $\binom{N+r}{r} \geq N + r \to \infty$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}} = \frac{r+1}{r}.$$

**따름 결과.** $r = 2$이면 $n = 1$부터의 합은 $\frac{3}{2}$이다. $n = 1$인 항은 $1/\binom{3}{3} = 1$이므로

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+2}{3}} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

### 소문항 (ii)

**첫째 부등식.** $n \geq 3$일 때

$$\frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{3!}{(n+1)n(n-1)} = \frac{3!}{n^3 - n} > \frac{3!}{n^3},$$

이다. $0 < n^3 - n < n^3$이기 때문이다(왼쪽 부등식은 $n \geq 2$이기 때문에 성립한다).

**둘째 부등식.** $\binom{n+1}{3} = \frac{1}{6}n(n^2-1)$이고 $\binom{n+2}{5} = \frac{1}{120}(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2) = \frac{1}{120}n(n^2-1)(n^2-4)$이다. 따라서

$$\frac{20}{\binom{n+1}{3}} - \frac{1}{\binom{n+2}{5}} = \frac{120}{n(n^2-1)} - \frac{120}{n(n^2-1)(n^2-4)} = \frac{120\,(n^2-5)}{n(n^2-1)(n^2-4)}.$$

$n \geq 3$이면 인수 $n, n^2-1, n^2-4$가 모두 양수이므로, 이 값이 $120/n^3 = 5!/n^3$보다 작을 필요충분조건은

$$n^2(n^2-5) < (n^2-1)(n^2-4), \quad \text{즉,} \quad n^4 - 5n^2 < n^4 - 5n^2 + 4,$$

이고, 이는 참이다.

> **생각해 보기** (i)의 어떤 합이 필요하며, 그 합은 어디서부터 시작하는가?

필요한 것은 $\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+1}{3}$과 $\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+2}{5}$이다. 첫째 합에서 $m = n-1$로 놓으면 $\sum_{m\geq 2} 1/\binom{m+2}{3} = \frac{1}{2}$가 되고, 이는 바로 (i)의 따름 결과이다. 둘째 합에서 $m = n-2$로 놓으면 $\sum_{m\geq 1} 1/\binom{m+4}{5}$가 되고, 이는 $r = 4$인 경우의 (i)이므로 값은 $\frac{5}{4}$이다.

여기에 나오는 급수는 모두 수렴(converge)한다(각 항이 양수이고, 부등식 자체가 보여 주듯 수렴하는 급수로 위로 유계이기 때문이다). 수렴하는 급수들 사이의 엄격한 부등식을 항

별로 더하면 엄격한 부등식을 얻는다. 양수인 차들의 합은 첫째 항 이상이고, 첫째 항이 양수이기 때문이다. $T = \sum_{n\geq 3} 1/n^3$으로 쓰자.

**상계.** 첫째 부등식을 $n \geq 3$에 대해 더하면

$$6T < \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{1}{2}, \qquad \text{이므로} \qquad T < \frac{1}{12}.$$

**하계.** 둘째 부등식을 $n \geq 3$에 대해 더하면

$$120\,T > 20 \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = \frac{35}{4}, \qquad \text{이므로} \qquad T > \frac{35}{480} = \frac{7}{96}.$$

마지막으로 $\sum_{n\geq 1} 1/n^3 = 1 + \frac{1}{8} + T$이고 $1 + \frac{1}{8} = \frac{108}{96}$이다. 따라서

$$\frac{108+7}{96} = \frac{115}{96} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{108}{96} + \frac{8}{96} = \frac{116}{96},$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

## 검산

- $n = r = 1$로 항등식을 확인하자. $1/\binom{2}{2} = 1$이고 $2\,(1/\binom{1}{1} - 1/\binom{2}{1}) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$이다.
- $r = 1$이면 합은 $\sum 1/\binom{n+1}{2} = \sum \frac{2}{n(n+1)} = 2$로, 익숙한 망원급수의 합이며 $\frac{r+1}{r} = 2$와 일치한다.
- 수치적으로 $\sum 1/n^3 \approx 1.20206$이고, $\frac{115}{96} \approx 1.19792$, $\frac{116}{96} \approx 1.20833$이므로 범위가 성립하며 값을 약 $0.01$ 이내로 좁혀 준다.

## 흔한 실수

- 첨자를 옮긴 뒤 시작 첨자를 잘못 잡는 것: $\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+1}{3}$은 $\binom{4}{3}$에서 시작하며, 이는 (i)의 따름 결과에서 $n = 1$인 항이 아니라 $n = 2$인 항이다.
- 부등식이 다루지 않는 $n = 1, 2$인 항 $1 + \frac{1}{8}$을 빠뜨리는 것.

## STEP 너머

수 $\sum 1/n^3$은 아페리 상수(Apéry's constant)라 불리는 $\zeta(3)$이다. $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$과 달리 이 수는 알려진 닫힌 꼴이 없으며, 아페리(Apéry)가 1978년에 이 수가 무리수임을 증명할 때 사용한 것도 여기서 다룬 것과 비슷한, 빠르게 수렴하는 급수였다. 급수를 망원급수와 비교하는 것, 그리고 부등식을 항별로 더하는 것은 대학 첫 해석학(analysis) 강의

의 표준 도구이다. 수렴과 비교판정법(comparison test)을 꼼꼼히 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.