풀이

STEP II 2017, 문제 9

역학 • 마찰과 강체

> **STEP II 2017, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q9

핵심 아이디어

각 원기둥은 널빤지와 바닥, 단 두 곳에서만 힘을 받는 강체(rigid body)이므로, 먼저 그 중심에 대한 모멘트(moment)를 잡는 것이 자연스럽다. 두 수직항력(normal reaction)은 중심을 지나므로 두 마찰력(frictional force)만 남고, 이 두 힘은 크기가 같아야 한다. 그 다음에는 원기둥과 널빤지 각각에 대해 힘을 분해(resolving)하고, 접촉점에서의 마찰 법칙 $G \le \frac{1}{2}R$와 $F \le \frac{1}{2}N$을 적용하면 된다. 기하학적 관계는 마지막에 가서야 θ를 a, r와 연결해 준다.

풀이

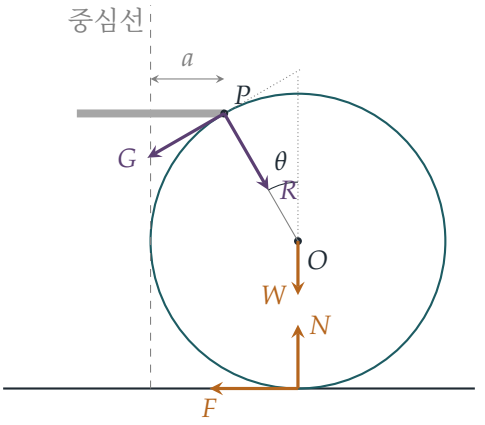
모형과 설정. 단면을 반지름 r인 두 원판과 하나의 수평 막대로 보고, 모든 접촉면은 거칠다고 하자. 두 원기둥 사이의 간격은 무시할 수 있으므로, 두 중심은 수직 대칭축(line of symmetry)의 양쪽으로 수평 거리 r만큼 떨어져 있다. 널빤지의 폭은 $2a < 2r$이므로, 널빤지는 두 긴 모서리가 원기둥의 안쪽 윗부분에 걸친 채로 놓인다. 대칭성에 의해 오른쪽 원기둥만 생각하면 충분하다.

널빤지가 이 원기둥에 닿는 점을 P라 하자. P에서의 접선(tangent)은 수평인 널빤지와 각 θ를 이루므로, P로 향하는 반지름은 수직선과 각 θ를 이룬다. 원기둥에 작용하는 힘은 다음과 같다.

- 중심 O에 작용하는 무게 W;
- 바닥에서 위쪽으로 작용하는 수직항력 N과 마찰력 F(널빤지가 원기둥을 바깥쪽으로 밀기 때문에 중심선 쪽을 향한다);
- P에서 PO 방향으로 작용하는 수직항력 R, 그리고 접선 방향으로 아래쪽 안쪽을 향하는

마찰력 G.

뉴턴 제3법칙(Newton's third law)에 의해 널빤지는 OP 방향(위쪽, 중심선에서 멀어지는 쪽)으로 R을, 접선 방향으로 위쪽 바깥쪽을 향하는 G를 받는다.



P를 지나는 점선이 접선이다. 수평 방향으로 P는 중심 O보다 $r\sin\theta$만큼 안쪽에 있고, O는 중심선에서 거리 r만큼 떨어져 있다.

소문항 (i)

원기둥에 대한 O에 관한 모멘트. W, N, R은 모두 O를 지난다. 두 마찰력은 모두 원에 접하는 방향이므로 각각의 모멘트는 (힘)$\times r$이고, 서로 반대 방향으로 돌린다. 즉 F는 바닥에서 안쪽을 향하고, G는 P에서 아래쪽 안쪽을 향한다. 따라서

$$Fr = Gr \quad \Longrightarrow \quad G = F.$$

원기둥에 대한 수평 방향 분해(바깥쪽을 양의 방향으로 한다): R의 수평 성분은 바깥쪽으로 $R\sin\theta$, G의 성분은 안쪽으로 $G\cos\theta$이고, 바닥 마찰력 F는 안쪽으로 작용하므로

$$R\sin\theta - G\cos\theta - F = 0.$$

$G = F$를 대입하면 이 식은

$$R\sin\theta = F(1+\cos\theta),$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

따름 결과. 널빤지에서 미끄러짐이 없으므로 그곳의 마찰력은 $G \le \frac{1}{2}R$, 즉 $F \le \frac{1}{2}R$를 만족한다. 그러면

$$R\sin\theta = F(1+\cos\theta) \le \tfrac{1}{2}R(1+\cos\theta),$$

이고, $\frac{1}{2}R > 0$(널빤지가 원기둥을 누르고 있다)으로 나누면 $2\sin\theta \le 1+\cos\theta$를 얻는다.

소문항 (ii)

널빤지에 대한 수직 방향 분해. 각 모서리는 위쪽 성분이 $R\cos\theta$인 R과, 접선 방향 위쪽으로 작용하며 위쪽 성분이 $F\sin\theta$인 $G = F$를 받는다. 따라서

$$2(R\cos\theta + F\sin\theta) = kW.$$

소문항 (i)에서 $R = \dfrac{F(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$이므로

$$R\cos\theta + F\sin\theta = \frac{F\left[(1+\cos\theta)\cos\theta + \sin^2\theta\right]}{\sin\theta} = \frac{F(1+\cos\theta)}{\sin\theta},$$

이다. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$이기 때문이다. 그러므로

$$\tfrac{1}{2}kW = \frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}F.$$

(널빤지에 작용하는 수평 방향의 힘들은 대칭성에 의해 상쇄되고, 모멘트도 마찬가지이다.)

원기둥에 대한 수직 방향 분해. 널빤지로부터의 반작용은 $R\cos\theta + G\sin\theta = \frac{1}{2}kW$만큼 아래로 누르므로

$$N = W + \tfrac{1}{2}kW = \left(\frac{2}{k} + 1\right)\tfrac{1}{2}kW = \left(1 + \frac{2}{k}\right)\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)F.$$

이것이 요구된 식이다. (이는 바닥이 전체 무게 $2W + kW$의 절반을 떠받친다는 당연한 사실일 뿐이다.)

바닥에서 미끄러지지 않을 조건. 조건은

$$F \le \tfrac{1}{2}N.$$

이다. N에 대한 식으로부터

$$\frac{N}{F} = \left(1 + \frac{2}{k}\right)\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}.$$

예각 θ에 대해 $\sin\theta > 0$이므로 소문항 (i)에서 $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \ge 2$이고, $k > 0$이므로 $1 + \frac{2}{k} > 1$이다. 따라서 $N/F > 2$, 즉 $F < \frac{1}{2}N$이다. 그러므로 널빤지가 미끄러지지 않기만 하면 바닥 조건은 자동으로 성립하며, θ에 추가적인 제한을 주지 않는다.

> **생각해 보기** 두 접촉점이 같은 마찰력 F를 받는데, 왜 바닥 접촉 조건은 저절로 성립할까?

바닥이 더 세게 누르기 때문이다. R와 N의 식을 비교하면 $N = \left(1 + \frac{2}{k}\right)R > R$인데, 바닥은 원기둥 자신의 무게까지 떠받치기 때문이다. 두 접촉점의 마찰력이 같고 바닥의 수직항력이 더 크므로, 항상 널빤지 쪽 접촉점이 먼저 미끄러진다.

소문항 (iii)

소문항 (i)의 부등식을 정리하여 제곱한다. 양변이 모두 양수이므로 제곱해도 부등호의 방향은 유지된다.

$$4\sin^2\theta \le (1+\cos\theta)^2 \iff 4(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) \le (1+\cos\theta)^2.$$

$1+\cos\theta > 0$으로 나누면 $4-4\cos\theta \le 1+\cos\theta$, 즉 $\cos\theta \ge \frac{3}{5}$이다. θ가 예각이므로

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} \le \sqrt{1-\tfrac{9}{25}} = \tfrac{4}{5}.$$

(같은 내용으로, $t = \tan\frac{1}{2}\theta$라 하면 부등식은 $2t \le 1$이 되고, $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$의 최댓값은 $t = \frac{1}{2}$일 때의 $\frac{4}{5}$이다.)

기하학적 관계. 널빤지의 모서리 P는 중심선에서 수평 거리 a만큼 떨어져 있다. 중심 O는 중심선에서 거리 r만큼 떨어져 있고, P는 O보다 $r\sin\theta$만큼 중심선에 더 가깝다. 따라서

$$a = r - r\sin\theta = r(1-\sin\theta) \ge r\left(1-\tfrac{4}{5}\right) = \tfrac{1}{5}r,$$

이고, 이로부터 $r \le 5a$를 얻는다.

검산

- 극단적인 경우인 $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$에서 $W = 1$, $k = 1$로 두자. 널빤지에 대한 식에서 $F = \frac{1}{4}$이고, 이어서 $R = \frac{1}{2}$, $N = \frac{3}{2}$이다. 따라서 $G/R = \frac{1}{2}$로 정확히 일치하고(널빤지가 막 미끄러지려는 상태), 반면 $F/N = \frac{1}{6}$으로 $\frac{1}{2}$보다 넉넉히 작아서 소문항 (ii)의 예측과 맞는다.
- 네 개의 평형(equilibrium) 방정식(모멘트, 그리고 두 물체 각각에 대한 분해)은 W, k, θ를 무작위로 10^5번 골라 컴퓨터로 확인하였다. $G \le \frac{1}{2}R$가 $\sin\theta \le \frac{4}{5}$일 때 그리고 그때에만 성립한다는 것과, 그때 $F < \frac{1}{2}N$이 항상 성립한다는 것도 함께 확인하였다.
- 극한에서의 타당성: 폭이 넓은 널빤지($a \to r$)는 원기둥의 꼭대기 근처에 놓이므로 $\theta \to 0$이 되어 마찰이 거의 필요 없다. 폭이 좁은 널빤지는 두 원기둥 사이에 깊이 끼어들고, 결국 그 사이로 미끄러져 내려간다.

흔한 실수

- 모멘트 방정식을 빠뜨려서 $G = F$임을 알아차리지 못하는 것. 이 식이 없으면 미지수가 너무 많다.
- 널빤지에서의 마찰력 방향을 잘못 잡는 것: 두 원기둥은 서로 멀어지는 방향으로 구르려 하므로, 원기둥에 작용하는 마찰력은 아래쪽 안쪽을 향한다.

- $a = r(1 - \sin\theta)$ 대신 $a = r\sin\theta$로 쓰는 것: a는 원기둥의 중심이 아니라 중심선에서부터 잰 거리이다.

STEP 너머

이것은 작은 정역학적으로 결정된(statically determinate) 계이다. 세 물체에 대해 모든 힘을 정하기에 충분한 방정식이 있고, 마찰에서 오는 부등식이 가능한 배치의 범위를 정해 준다. 대학 1학년 과정에서는 같은 아이디어가 강체 평형의 조건(알짜힘이 0이고 전체 모멘트가 0)으로 다시 등장하고, 나중에는 쐐기 작용과 끼임 현상(wedging and jamming)의 연구에서도 나타난다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.