풀이

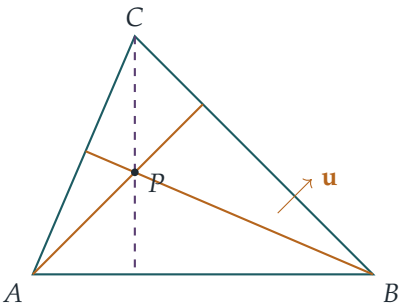
# STEP II 2017, 문제 8

순수수학 • 벡터와 수심

> **STEP II 2017, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q8

## 핵심 아이디어

이 문제는 삼각형의 세 수선(altitude)이 한 점, 즉 **수심**(*orthocentre*)에서 만난다는 사실을 벡터로 증명하는 것이다. 두 직선 $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}$와 $\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$가 만나는 점을 구하는 요령은, 방정식의 양변에 $\mathbf{v}$에 수직인 벡터를 스칼라곱(scalar product)하는 것이다. 그러면 $\mu$가 단번에 사라진다. 여기서는 그런 벡터가 이미 주어져 있다. $\mathbf{v}$가 $CA$에 수직이므로 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$가 바로 그 역할을 한다.




## 풀이

### 첫 번째 수선

$A$를 지나고 $BC$에 수직인 직선은 $\mathbf{a}$를 지나며 방향이 $\mathbf{u}$이다(평면에서 생각하고 있으므로 $BC$에 수직인 벡터는 모두 $\mathbf{u}$의 실수배이다). 이 직선의 방정식은

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}.$$

이다. 마찬가지로 $B$를 지나고 $CA$에 수직인 직선은 $\mathbf{r}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$이다.

### $P$ 구하기

이 두 직선은 평행하지 않다. 만약 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 평행하다면, 같은 평면에서 각각 이들에 수직인 $BC$와 $CA$도 평행해야 하는데, 삼각형에서는 이것이 불가능하다. 따라서 두 직선은 정확히 한 점 $P$에서 만나고, 그 점에서

$$\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mu\mathbf{v}.$$

이다. 양변에 $\mathbf{c} - \mathbf{a}$를 스칼라곱한다. $\mathbf{v}$가 $CA$에 수직이므로 $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$이고, $\mu$가 사라진다.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) + \lambda\, \mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}), \qquad \text{따라서} \qquad \lambda\, \mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

> ? **생각해 보기** $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})$로 나누어도 되는가?

그렇다. 만약 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$이라면 $\mathbf{u}$는 $BC$뿐 아니라 $CA$에도 수직이 된다. 평면에서는 이로부터 $CA$와 $BC$가 평행해야 하는데, 실제로는 그렇지 않다. 그러므로

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})}{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})}\, \mathbf{u}.$$

이다.

### $CP$는 $AB$에 수직이다

$(\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$임을 보이면 된다. 위에서 구한 계수를 $\lambda$라 하자. 그러면

$$(\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \lambda\, \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

이다. 여기서 유용한 관찰은, $\mathbf{u}$가 $BC$에 수직이므로 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$이라는 것이다. 따라서

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

이다. 그러므로 $\lambda\, \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \lambda\, \mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})$이고,

$$(\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = -(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0.$$

이다.

> ? **생각해 보기** 스칼라곱이 0이라는 것만으로 정말 직선 $CP$가 얻어지는가?

$P \neq C$일 때만 그렇다. 바로 이 부분에서 "직각삼각형이 아니다"라는 조건이 쓰인다. 만약 $P = C$라면 $C$는 $A$를 지나고 $BC$에 수직인 직선 위에 있으므로 $AC \perp BC$가 되어 $C$에서의 각이 직각이 되는데, 이는 조건에서 제외되었다. 따라서 $\mathbf{p} - \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$이고, $\mathbf{b} - \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$이므로 스칼라곱이 0이라는 것은 정확히 $CP$가 $AB$에 수직이라는 뜻이다. 그러므로 삼각형의 세 수선은 모두 $P$를 지난다.

## 검산

$A = (0,0)$, $B = (5,0)$, $C = (1.5, 3.5)$로 두고, $\mathbf{c} - \mathbf{b} = (-3.5, 3.5)$에 수직인 $\mathbf{u} = (1,1)$을 택하자. 그러면 $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 7.5$이고 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 5$이므로 $\lambda = 1.5$, $P = (1.5, 1.5)$이다. 이 점은 $C$의 바로 아래에 있으므로 $CP$는 수직선이 되어 $AB$에 수직이고, $(\mathbf{p} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (-3.5)(1.5) + (1.5)(3.5) = 0$이므로 $P$는 $B$에서 내린 수선 위에도 있다. 일반적인 결과도 컴퓨터로 여러 개의 무작위 삼각형에 대해 확인하였다. 또한 $\mathbf{u}$를 $k\mathbf{u}$로 바꾸어도 $\mathbf{p}$에 대한 식이 변하지 않는다는 점에 주목하자. 당연히 그래야 한다.

## 흔한 실수

- $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ 대신 $\mathbf{v}$나 $\mathbf{u}$와 스칼라곱하는 것. 이렇게 하면 방정식에 두 매개변수(parameter)가 모두 남는다.
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})$가 0이 아닌 이유를 밝히지 않고 그것으로 나누는 것.
- 마지막 소거가 성립하게 해 주는 단계인 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})$를 놓치는 것.

## STEP 너머

임의의 삼각형의 수심 $H$, 무게중심(centroid) $G$, 외심(circumcentre) $O$는 한 직선, 즉 오일러(Euler) 직선(Euler line) 위에 있으며 $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$이다. $O$를 원점으로 잡으면 이것은 $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$라는 깔끔한 명제가 되는데, 같은 스칼라곱 아이디어로 증명할 수 있다. 이런 종류의 스칼라곱은 선형대수학(linear algebra) 첫 강좌에서 공부하는 내적 공간(inner-product space)의 출발점이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이 개념이 전개되는 과정을 살펴보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.