풀이

STEP II 2017, 문제 7

순수수학 • 로그 미분법

> **STEP II 2017, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q7

핵심 아이디어

여기에 나오는 모든 거듭제곱은 로그(logarithm)를 통해 $a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}$로 정의되므로, x의 두 거듭제곱을 비교하는 것은 그 로그를 비교하는 것이다. 또한 exp가 증가함수(increasing function)이므로 두 비교는 동치이다. 주의할 점은 단 하나, $\ln x$의 부호이다. $0 < x < 1$이면 $\ln x$는 음수이고, 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다. 로그를 취하면 도함수(derivative)를 구하는 일도 기계적인 계산이 된다.

풀이

풀이 전체에서 $\ln \mathrm{f}(x) = x\ln x$이고 $\ln \mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(x)\ln x$이다.

소문항 (i)

$0 < x < 1$이라 하면 $\ln x < 0$이고 $x - 1 < 0$이다. 그러면

$$\ln \mathrm{f}(x) - \ln x = x\ln x - \ln x = (x-1)\ln x > 0,$$

이다. 이는 두 음수의 곱이기 때문이다. exp가 증가함수이므로 $\mathrm{f}(x) > x$이다.

또 $x\ln x < 0$이므로 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{x\ln x} < 1$이다. 이제 다시 로그를 비교하면

$$\ln \mathrm{g}(x) - \ln x = (\mathrm{f}(x)-1)\ln x > 0, \qquad \text{이유: } \mathrm{f}(x) < 1,\ \ln x < 0,$$
$$\ln \mathrm{f}(x) - \ln \mathrm{g}(x) = (x - \mathrm{f}(x))\ln x > 0, \qquad \text{이유: } \mathrm{f}(x) > x,\ \ln x < 0.$$

따라서 $\ln x < \ln \mathrm{g}(x) < \ln \mathrm{f}(x)$이고, 이로부터 $0 < x < 1$일 때 $x < \mathrm{g}(x) < \mathrm{f}(x)$가 되어 원하는 결과를 얻는다.

$x > 1$일 때도 같은 차를 쓰면 되지만, 이번에는 $\ln x > 0$, $x - 1 > 0$, $x \ln x > 0$이므로 $f(x) > 1$이다. 그러면 $(x-1)\ln x > 0$에서 $f(x) > x$를 얻고, $(x - f(x))\ln x < 0$에서 $g(x) > f(x)$를 얻는다. 따라서

$$x < f(x) < g(x) \qquad \text{단, } x > 1,$$

이고, $x = 1$에서는 세 값이 모두 1이다.

소문항 (ii)

$\ln f(x) = x \ln x$를 미분하면 $f'(x)/f(x) = \ln x + 1$이므로

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1).$$

$x^x > 0$이므로 $f'(x) = 0$인 것은 $\ln x = -1$, 즉 $x = e^{-1}$일 때뿐이다. (그 점에서 f'의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 이 점은 최솟값(minimum)을 주며, 그 값은 $e^{-1/e} \approx 0.692$이다.)

소문항 (iii)

$x \to 0$일 때 $x \ln x \to 0$이고 exp는 연속(continuous)이므로

$$f(x) = e^{x \ln x} \to e^0 = 1.$$

다음으로 $\ln g(x) = f(x) \ln x$에서 $f(x) \to 1$이고 $\ln x \to -\infty$이므로 $\ln g(x) \to -\infty$이고

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

소문항 (iv)

$x > 0$에서 $h(x) = x^{-1} + \ln x$라 하자. 그러면

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2},$$

이고, 이는 $0 < x < 1$에서 음수, $x > 1$에서 양수이다. 따라서 h는 감소하다가 증가하며, 최솟값은 $h(1) = 1$이다. 그러므로 모든 $x > 0$에 대하여 $x^{-1} + \ln x \geq 1$이다.

이제 소문항 (ii)를 이용하여 $\ln g(x) = f(x) \ln x$를 곱의 미분법(product rule)으로 미분하면

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} = x^x \left[(\ln x + 1) \ln x + \frac{1}{x} \right] = x^x \left[(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \right].$$

? **생각해 보기** 방금 증명한 부등식이 이 괄호를 다루는 데 어떻게 도움이 될까?

괄호 안에는 정확히 $\frac{1}{x}+\ln x$가 들어 있고, 이 값은 1 이상이다. 따라서

$$(\ln x)^2+\ln x+\frac{1}{x} \;\geq\; (\ln x)^2+1 \;>\; 0.$$

$\mathrm{g}(x)>0$이고 $x^x>0$이므로

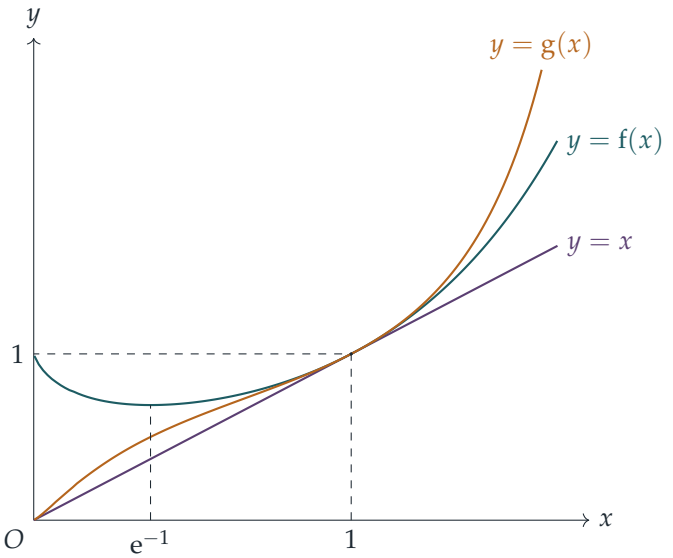
$$\mathrm{g}'(x)=\mathrm{g}(x)\,x^x\left[(\ln x)^2+\ln x+\frac{1}{x}\right]>0 \qquad \text{모든} x>0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

그래프 그리기

지금까지의 사실을 모으면 다음과 같다.

- $y=\mathrm{f}(x)$는 $x\to 0$일 때 1에서 출발하여 $x=\mathrm{e}^{-1}$에서 최솟값 $\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$까지 내려간 뒤, $(1,1)$을 지나 올라가며 매우 빠르게 커진다. $\mathrm{f}'(x)=x^x(\ln x+1)\to-\infty$이므로 0 근처에서는 매우 가파르다.
- $y=\mathrm{g}(x)$는 원점에서 출발하여 전 구간에서 증가하며(소문항 (iv)), $(1,1)$을 지난다.
- $0<x<1$에서는 순서가 $x<\mathrm{g}<\mathrm{f}$이고, $x>1$에서는 $x<\mathrm{f}<\mathrm{g}$이다. 따라서 g와 f는 $(1,1)$에서 교차하고, 세 곡선이 모두 그 점에서 만난다.
- $x=1$에서 $\mathrm{f}'(1)=1$이고 $\mathrm{g}'(1)=1\cdot 1\cdot(0+0+1)=1$이므로, 두 곡선 모두 $(1,1)$에서 $y=x$에 접한다.
- 원점 근처에서 $\mathrm{g}(x)/x=\mathrm{e}^{(\mathrm{f}(x)-1)\ln x}\to 1$이다($\mathrm{f}(x)-1\approx x\ln x$이므로 지수는 $x(\ln x)^2\to 0$처럼 행동한다). 따라서 $y=\mathrm{g}(x)$는 $y=x$를 따라, 그 바로 위쪽으로 원점을 떠난다.



검산

- $x = \frac{1}{2}$에서 $\mathrm{f} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$이고 $\mathrm{g} = (\frac{1}{2})^{0.707} \approx 0.613$이므로 $0.5 < 0.613 < 0.707$이다. $x = 2$에서 $\mathrm{f} = 4$이고 $\mathrm{g} = 2^4 = 16$이므로 $2 < 4 < 16$이다.
- $\mathrm{f}(0.3) \approx 0.697$, $\mathrm{f}(\mathrm{e}^{-1}) \approx 0.6922$, $\mathrm{f}(0.4) \approx 0.693$이므로 e^{-1}에서 최솟값을 갖는다는 사실과 맞는다.
- g'의 식에서 $\mathrm{g}'(\frac{1}{2}) \approx 0.774$를 얻는데, 이는 그 점에서 g의 차분몫(difference quotient)과 일치한다. 컴퓨터로 확인한 결과 $(0, 3)$에서 $\mathrm{g}' > 0$임도 확인되었다.

흔한 실수

- $(0, 1)$에서 $\ln x < 0$임을 잊고, 그것으로 나눌 때 부등호 방향을 바꾸지 않는 실수. 바로 이 때문에 $x = 1$에서 순서가 뒤바뀐다.
- x^x를 $x \cdot x^{x-1}$로 미분하거나(지수를 상수로 취급), $x^x \ln x$로 미분하는(밑을 상수로 취급) 실수. 두 부분이 모두 필요하다.
- g의 극한(limit)을 $1^{-\infty}$로 쓰고 짐작하는 실수. 대신 $\ln \mathrm{g} = \mathrm{f} \ln x$를 가지고 계산해야 한다.

STEP 너머

거듭제곱 탑 $x^{x^{x^{\cdots}}}$도 이 패턴을 이어 간다. $0 < x < 1$일 때 홀수 높이의 탑 x, g, ...와 짝수 높이의 탑 f, ...는 서로 엇갈리며 배열되고, 무한 탑은 정확히 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \leq x \leq \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$일 때 수렴(converge)한다. 이는 단조수열(monotone sequence)과 고정점(fixed point)을 다루는 좋은 연습 문제이다. $x \ln x \to 0$과 같은 극한, 그리고 exp와 ln을 통한 a^b의 엄밀한 정의는 대학 첫 해석학(analysis) 강의에서 제대로 다룬다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.