풀이

STEP II 2017, 문제 6

순수수학 • 부등식과 수학적 귀납법

> **STEP II 2017, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q6

핵심 아이디어

두 소문항 모두 합 S_n을 대략 $\int_0^n x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$에 해당하는 $2\sqrt{n}$과 비교한다. (i)의 귀납법(induction)에서 n에서 $n+1$로 넘어가는 단계는 결국 $1/\sqrt{n+1}$과 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$을 비교하는 문제가 되고, 그 차를 유리화(rationalising)하면 해결된다. (ii)에서 가장 작은 C는 (C를 뺀) 우변과 S_n 사이의 차이의 최댓값(maximum)이다. 따라서 이 차이가 n에서 $n+1$로 갈 때 어떻게 변하는지 살펴보는데, 주어진 부등식(inequality)이 바로 그 차이가 항상 줄어든다는 사실을 알려 준다.

풀이

소문항 (i)

$P(n)$을 명제 $S_n \le 2\sqrt{n}-1$이라 하자.

기저 단계(*base case*). $S_1 = 1$이고 $2\sqrt{1}-1 = 1$이므로 $P(1)$이 (등호로) 성립한다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $k \ge 1$에 대하여 $P(k)$가 성립한다고 가정하자. 그러면

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k} - 1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

이므로 다음을 보이면 충분하다.

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k+1}, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}).$$

유리화하면

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \ge \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

이다. $\sqrt{k} \leq \sqrt{k+1}$이므로 분모가 $2\sqrt{k+1}$보다 크지 않기 때문이다. 따라서 $S_{k+1} \leq 2\sqrt{k+1} - 1$이고, 이것이 $P(k+1)$이다.

$P(1)$이 참이고 모든 $k \geq 1$에 대하여 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$이므로, 모든 양의 정수 n에 대하여 $S_n \leq 2\sqrt{n} - 1$이다.

소문항 (ii): 부등식

$k \geq 0$이면 $(4k+1)\sqrt{k+1} > (4k+3)\sqrt{k}$의 양변은 모두 음이 아니고 좌변은 양수이므로, 이 부등식은 양변을 제곱한 부등식과 동치이다. 이제

$$\begin{aligned}(4k+1)^2(k+1) - (4k+3)^2 k &= (16k^2+8k+1)(k+1) - (16k^2+24k+9)k \\ &= (16k^3+24k^2+9k+1) - (16k^3+24k^2+9k) \\ &= 1 > 0.\end{aligned}$$

따라서 $(4k+1)^2(k+1) > (4k+3)^2 k$이고, 양의 제곱근을 취하면 모든 $k \geq 0$에 대하여 $(4k+1)\sqrt{k+1} > (4k+3)\sqrt{k}$를 얻는다. 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (ii): 가장 작은 C

다음과 같이 정의하자.

$$T_n = 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - S_n.$$

부등식 $S_n \geq 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - C$는 $C \geq T_n$과 같다. 따라서 이 부등식이 모든 n에 대하여 성립할 필요충분조건은 C가 모든 T_n 이상인 것이고, 그러한 C 중 가장 작은 값은 (존재한다면) T_n의 최댓값이다.

> **?** **생각해 보기** S_n의 공식을 모르는 채로 가장 큰 T_n을 어떻게 찾을까?

S_n이 사라지는 변화량 $T_{n+1} - T_n$을 살펴본다. $S_{n+1} - S_n = 1/\sqrt{n+1}$이므로

$$\begin{aligned}T_{n+1} - T_n &= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

양변에 양수 $2\sqrt{n}\sqrt{n+1}$을 곱하면

$$\begin{aligned}2\sqrt{n}\sqrt{n+1}\,(T_{n+1} - T_n) &= 4(n+1)\sqrt{n} - 4n\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - \sqrt{n+1} \\ &= (4n+3)\sqrt{n} - (4n+1)\sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

방금 증명한 부등식($k = n$인 경우)에 의하여 이 값은 음수이다. 따라서 모든 $n \geq 1$에 대하여 $T_{n+1} < T_n$이다. 즉 수열(sequence) T_n은 순감소(strictly decreasing)하고, 그 최댓값은

첫째 항

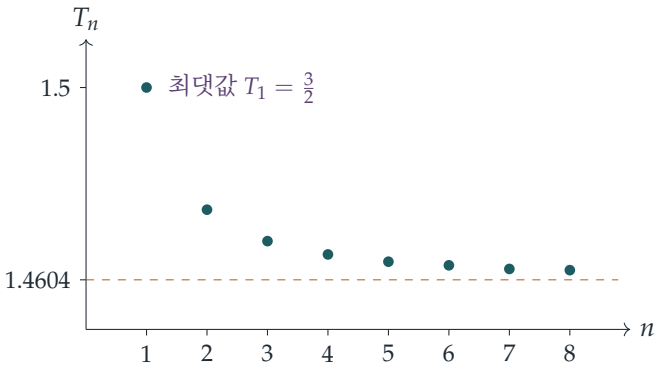
$$T_1 = 2 + \tfrac{1}{2} - 1 = \tfrac{3}{2}.$$

이다. 그러므로 모든 $n \geq 1$에 대하여 $S_n \geq 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{3}{2}$이다. 이보다 작은 C로는 안 된다. $n = 1$일 때 부등식은 $1 \geq \frac{5}{2} - C$가 되어 $C \geq \frac{3}{2}$가 필요하기 때문이다. 가장 작은 수는

$$C = \tfrac{3}{2}.$$

이다.

T_n의 처음 몇 값을 보면 얼마나 빨리 안정되는지 알 수 있다.



(세로축은 늘여 그린 것으로, 대략 1.45부터 1.51까지이다.)

검산

- $n = 4$일 때: $S_4 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \approx 2.7845$이고, 이는 두 결과가 요구하는 대로 $2\sqrt{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = 2.75$와 $2\sqrt{4} - 1 = 3$ 사이에 있다.
- 처음 200 000개의 값을 컴퓨터로 확인한 결과 두 경계가 모두 성립하고 T_n이 감소함이 확인되었다. T_n은 1.5에서 약 1.46035를 향해 줄어들며 다시는 1.5로 돌아오지 않는다.
- 항등식 $(4k+1)^2(k+1) - (4k+3)^2 k = 1$은 $k = 1$에서 쉽게 확인할 수 있다: $25 \cdot 2 - 49 = 1$.

흔한 실수

- 최댓값 대신 T_n의 극한(limit)(약 1.46)을 답으로 쓰는 것. $\frac{3}{2}$보다 작은 C는 $n = 1$에서 성립하지 않는다.
- 양변이 음이 아님을 먼저 확인하지 않고 부등식을 제곱하는 것.

- 등호가 성립하는 경우를 제시하여 $C = \frac{3}{2}$가 실제로 가장 작은 값임을 보이는 것을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

수열 T_n은 감소하며 어떤 극한으로 수렴하는데, 그 극한은 $-\zeta(\frac{1}{2}) \approx 1.46035$이다. 여기서 ζ는 리만(Riemann) 제타 함수(Riemann zeta function)로, 정의하는 급수가 수렴하는 영역 바깥으로 확장한 것이다. 합을 적분과 비교한 뒤 $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 같은 항으로 보정하는 것은 오일러-매클로린 공식(Euler–Maclaurin formula)의 출발점이다. 바탕에 깔린 사실, 즉 유계인 단조수열은 수렴한다는 사실은 대학 1학년 해석학(analysis)의 단조 수렴 정리(monotone convergence theorem)이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 이를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.