풀이

STEP II 2017, 문제 5

순수수학 • 포물선의 법선과 원

> **STEP II 2017, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q5

핵심 아이디어

모든 것은 포물선(parabola) $x = at^2$, $y = 2at$에 대한 한 가지 사실에 달려 있다. 매개변수(parameter)가 t_1과 t_2인 두 점을 잇는 현(chord)의 기울기(gradient)는 $\dfrac{2}{t_1 + t_2}$이다. 이 사실을 이용하면 "법선이 곡선과 다시 만난다"는 조건과 "반원에 대한 원주각은 직각이다"라는 사실이 모두 매개변수 사이의 간단한 방정식이 되고, 기하 문제는 짧은 대수 계산으로 바뀐다.

풀이

유용한 사실: 현의 기울기

서로 다른 매개변수 $t_1 \neq t_2$에 대하여, $(at_1^2, 2at_1)$과 $(at_2^2, 2at_2)$를 잇는 현의 기울기는

$$\frac{2a(t_1 - t_2)}{a(t_1^2 - t_2^2)} = \frac{2}{t_1 + t_2},$$

이다. 여기서 $t_1 - t_2 \neq 0$으로 약분하였다. ($t_1 + t_2 = 0$이면 현은 수직이다.) $t_2 \to t_1$로 보내면 t에서의 접선(tangent)의 기울기는 $\frac{1}{t}$이다. 직접 계산해도 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$이다.

소문항 (i)

P에서 접선의 기울기는 $\frac{1}{p}$이므로 법선(normal)의 기울기는 $-p$이다(여기서 $p \neq 0$을 사용한다). $n \neq p$인 점 N이 이 법선 위에 있을 필요충분조건은 현 PN의 기울기가 $-p$인 것이다.

$$\frac{2}{p+n} = -p \iff p + n = -\frac{2}{p} \iff n = -\left(p + \frac{2}{p}\right).$$

(P에서의 법선은 유한한 기울기 $-p$를 가지므로 현 PN은 수직일 수 없다.) $n - p = -2(p + \frac{1}{p})$이고 실수 p에 대하여 $p + \frac{1}{p} \neq 0$이므로 $n \neq p$이다. 따라서 이것은 실제로 두 번째 점이다. 이로써 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

$p + n = -\frac{2}{p}$와 $p - n = 2p + \frac{2}{p} = \frac{2(p^2+1)}{p}$를 이용하면

$$\begin{aligned}|PN|^2 &= a^2(p^2 - n^2)^2 + 4a^2(p-n)^2 \\ &= a^2(p-n)^2[(p+n)^2 + 4] \\ &= a^2 \cdot \frac{4(p^2+1)^2}{p^2} \cdot \left(\frac{4}{p^2} + 4\right) = a^2 \cdot \frac{4(p^2+1)^2}{p^2} \cdot \frac{4(p^2+1)}{p^2} \\ &= 16a^2 \, \frac{(p^2+1)^3}{p^4},\end{aligned}$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

최솟값을 구하기 위해 $u = p^2 > 0$, $f(u) = \frac{(u+1)^3}{u^2}$으로 놓는다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의하여

$$f'(u) = \frac{3(u+1)^2u^2 - 2u(u+1)^3}{u^4} = \frac{(u+1)^2(3u - 2u - 2)}{u^3} = \frac{(u+1)^2(u-2)}{u^3}.$$

$u > 0$일 때 인수 $\frac{(u+1)^2}{u^3}$은 양수이므로 $0 < u < 2$에서 $f'(u) < 0$이고 $u > 2$에서 $f'(u) > 0$이다. 따라서 f는 감소하다가 증가하며, $u > 0$에서의 최솟값은 $u = 2$, 즉 $p^2 = 2$일 때이다. $|PN|^2 = 16a^2 f(p^2)$이므로 이때 $|PN|$이 최소가 된다. (최솟값은 $|PN|^2 = 16a^2 \cdot \frac{27}{4} = 108a^2$이므로 $|PN| = 6\sqrt{3}\,a$이다.)

소문항 (iii)

PN이 지름(diameter)이고 Q가 P, N이 아닌 원 위의 점이므로, 각 PQN은 직각이다(반원에 대한 원주각). 따라서 $QP \perp QN$이다.

> **생각해 보기** QP나 QN이 수직이어서 기울기를 곱할 수 없는 경우가 있을까?

QP가 수직이라면 QN은 수평이므로 Q와 N의 y좌표가 같아 $q = n$이 되는데, $Q \neq N$이므로 이는 불가능하다. 마찬가지로 QN이 수직이면 QP가 수평이 되어 $q = p$가 된다. 따라서 두 기울기는 모두 유한하고 0이 아니며, 그 곱은 -1이다.

$$\frac{2}{q+p} \cdot \frac{2}{q+n} = -1 \iff (q+p)(q+n) = -4.$$

이를 전개하고 소문항 (i)에서 얻은 $p+n=-\frac{2}{p}$와 $pn=-p^2-2$를 이용하면

$$q^2+(p+n)q+pn=q^2-\frac{2q}{p}-p^2-2=-4,$$

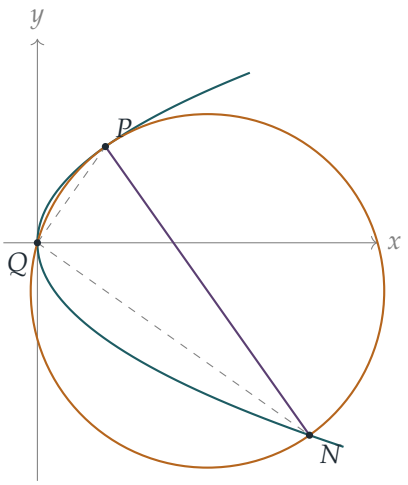
이고, 이를 정리하면

$$2=p^2-q^2+\frac{2q}{p},$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다.

따름 결과. $q=0$을 대입하면 관계식은 $2=p^2$이 된다. 역으로 $p^2=2$이면 관계식에서 $q^2-\frac{2q}{p}=0$, 즉 $q=0$ 또는 $q=\frac{2}{p}$이다. 그런데 $\frac{2}{p}=\frac{p^2}{p}=p$이고 이는 점 P 자신이므로, Q는 $q=0$이어야 한다. 따라서 Q가 원점에 있을 필요충분조건은 $p^2=2$이고, 소문항 (ii)에 의하여 이는 정확히 $|PN|$이 최소일 때이다.

일반적으로 이 관계식은 두 근의 합이 $\frac{2}{p}$인 이차방정식 $q^2-\frac{2}{p}q+(2-p^2)=0$이다. 한 근은 항상 $q=p$이므로 다른 근은 $q=\dfrac{2-p^2}{p}$이고, 이는 정확히 $p^2=2$일 때 0이다.



그림은 최소가 되는 경우인 $a=1$, $p=\sqrt{2}$를 나타낸다. 법선 PN(자주색), PN을 지름으로 하는 원(호박색), 그리고 $Q=O$에서의 직각이 보인다.

검산

- $a=1, p=1$이면 $n=-3$이므로 $P=(1,2), N=(9,-6)$이다. 이때 $|PN|^2=64+64=128$이고, 공식도 $16\cdot 8/1=128$을 준다.
- $p=\sqrt{2}, a=1$이면 $P=(2,2\sqrt{2}), N=(8,-4\sqrt{2})$이고 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{ON}=16-16=0$이므로, 원점은 실제로 PN을 지름으로 하는 원 위에 있다. 이때 $|PN|=6\sqrt{3}\approx 10.392$이다.

- 여러 p 값에 대하여 원과 포물선이 만나는 점을 수치적으로 구해 보면, (P 외에) 정확히 매개변수 n과 $\frac{2-p^2}{p}$를 얻는다.

흔한 실수

- $q = p$도 마지막 관계식을 만족한다는 것을 잊어서, $p^2 = 2$일 때 Q의 위치가 두 가지라고 잘못 결론 내리는 것.
- 법선의 기울기를 $-\frac{1}{p}$로 쓰는 것. 접선의 기울기가 $\frac{1}{p}$이므로 법선의 기울기는 $-p$이다.

STEP 너머

원과 포물선은 보통 네 점에서 만나며, 원의 방정식에 $x = at^2$, $y = 2at$를 대입하면 t^3 항이 없는 t에 대한 사차방정식(quartic)을 얻으므로 네 매개변수의 합은 0이다. 여기서 $n + q = -\frac{2}{p} - p + \frac{2}{p} = -p$이므로 네 번째 매개변수는 다시 p이다. 즉 원은 P에서 포물선에 접한다. 그 점에서 원의 반지름이 법선 위에 놓여 있으므로 당연히 그래야 한다. 이처럼 중복도(multiplicity)를 고려하여 교점을 세는 것은 대수기하학(algebraic geometry)의 출발점이다(베주 정리(Bézout's theorem)). 이런 유형의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.