풀이

STEP II 2017, 문제 4

순수수학 • 코시-슈바르츠 적분 부등식

> **STEP II 2017, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q4

핵심 아이디어

슈바르츠 부등식(Schwarz inequality)은 곱의 적분 $\int fg$를 제곱의 적분 $\int f^2$와 $\int g^2$로 위에서 누른다. 따라서 핵심 기술은 우리가 누르고 싶은 단 하나의 적분을 빼면 모든 적분을 계산할 수 있도록 f와 g를 고르는 것이다. 구하려는 적분이 $\int fg$이면 **상계**(upper bound)를 얻는다. 그것이 $\int f^2$나 $\int g^2$이면 양변을 나누어 **하계**(lower bound)를 얻는다.

풀이

이 풀이 전체에서 $(*)$를 $\left(\int fg\right)^2 \le \int f^2 \cdot \int g^2$ 의 꼴로 쓴다.

소문항 (i)

목표 식에 e^t가 들어 있으므로 $f(x) = 1, g(x) = \mathrm{e}^x, a = 0, b = t$로 잡는다. 그러면

$$\int_0^t \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t - 1, \qquad \int_0^t 1 \,\mathrm{d}x = t, \qquad \int_0^t \mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t} - 1),$$

이므로 $(*)$는 다음을 말해 준다.

$$(\mathrm{e}^t - 1)^2 \le \frac{t}{2}\,(\mathrm{e}^{2t} - 1) = \frac{t}{2}\,(\mathrm{e}^t - 1)(\mathrm{e}^t + 1).$$

$t > 0$이므로 $\mathrm{e}^t - 1 > 0$이고, 또 $\mathrm{e}^t + 1 > 0$이다. 양수인 $(\mathrm{e}^t - 1)(\mathrm{e}^t + 1)$로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않으므로

$$\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1} \le \frac{t}{2},$$

를 얻고, 이것이 증명하려던 식이다.

소문항 (ii)

$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$가 $\int g^2$로 나타나기를 바라므로, $[0,1]$에서 $g(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$, $f(x)=x$로 잡는다. 곱 $x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$는 바로 우리가 적분할 수 있는 꼴이다(바깥에 있는 x의 거듭제곱이 상수배를 제외하면 지수의 도함수(derivative)이다).

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}\right]_0^1=2(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}),\qquad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

따라서 $(*)$에서

$$4(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}})^2\le\frac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x,$$

를 얻고, 양변에 3을 곱하면

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x\ge 12(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}})^2.$$

소문항 (iii)

$J=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$라 하자. 여기서 모든 적분은 구간 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 위에서 하며, 이 구간에서 $\sin x\ge 0$이고 $\cos x\ge 0$이므로 모든 거듭제곱근은 실수이다.

상계. 여기서는 J가 $\int fg$가 되어야 한다. $f(x)=1$, $g(x)=\sqrt{\sin x}$로 잡으면 $g^2=\sin x$는 적분하기 쉽다.

$$J^2\le\int_0^{\frac{1}{2}\pi}1\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot 1.$$

$J>0$이므로 양의 제곱근을 취하면 $J\le\sqrt{\pi/2}$이다.

하계. 이번에는 J가 제곱의 적분 가운데 하나여야 하므로 $f(x)=(\sin x)^{1/4}$로 잡아 $f^2=\sqrt{\sin x}$가 되게 한다.

> **생각해 보기** 어떤 g를 잡아야 $\int fg$와 $\int g^2$를 모두 계산할 수 있을까?

g^2를 적분하기 쉬워야 하고, $(\sin x)^{1/4}g(x)$도 적분하기 쉬워야 한다. $g(x)=\cos x$로 고르면 두 조건을 모두 만족한다. $(\sin x)^{1/4}\cos x$는 $\sin x$의 거듭제곱에 그 도함수를 곱한 꼴이기 때문이다. 답의 모양도 단서가 된다. 분모에 π가 있다는 것은 $\int g^2=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$를 암시한다. 실제로

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{1/4}\cos x\,\mathrm{d}x=\left[\tfrac{4}{5}(\sin x)^{5/4}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{4}{5}$$

이고

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

이다. 따라서 $(*)$에서

$$\frac{16}{25}\le J\cdot\frac{\pi}{4},\qquad \text{즉,}\qquad J\ge\frac{64}{25\pi}.$$

두 결과를 합치면

$$\frac{64}{25\pi} \le \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

덧붙임. 다른 선택도 통하며, 그중에는 더 좋은 결과를 주는 것도 있다. $f = (\sin x)^{1/4}$, $g = (\sin x)^{3/4}$로 잡으면 $1 \le J \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{3/2}\,\mathrm{d}x$를 얻고, $f = \sin x$, $g = \sqrt{\sin x}$로 $(*)$를 한 번 더 쓰면 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{3/2}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\pi/4}$임을 알 수 있다. 이 둘을 합치면 더 정밀한 하계 $J \ge 2/\sqrt{\pi} \approx 1.128$을 얻는다.

검산

- (i): $t \to 0$일 때 좌변은 $\tanh(t/2) \approx t/2$이므로, 작은 t에 대해 이 부등식은 거의 등식에 가깝다. t가 크면 좌변은 1로 수렴(converge)하지만 $t/2$는 한없이 커진다.
- (ii): $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0.8556$이고, $12(1-\mathrm{e}^{-1/4})^2 \approx 0.5871$이다.
- (iii): 수치적으로 $J \approx 1.1981$이며, 이는 $64/(25\pi) \approx 0.8149$와 $\sqrt{\pi/2} \approx 1.2533$ 사이에 있다. 상계가 꽤 가까운 까닭은 $\sqrt{\sin x}$가 구간의 대부분에서 거의 평평하게(1 근처에) 유지되고, $f = 1$로 잡은 슈바르츠 부등식은 g가 상수일 때 정확히 등식이 되기 때문이다.

흔한 실수

- 부등식의 방향을 거꾸로 잡는 실수. 모르는 적분을 $\int fg$로 두면 슈바르츠 부등식은 그것을 위에서만 누를 수 있다. 따라서 하계를 얻으려면 모르는 적분을 $\int f^2$나 $\int g^2$로 두어야 한다.
- (i)에서 $\mathrm{e}^t - 1$이 양수라는 것을 밝히지 않고 그것으로 나누는 실수.
- (iii)의 상계에서 $J > 0$을 이용해 양의 제곱근을 취한다는 것을 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

슈바르츠(코시–슈바르츠, Cauchy–Schwarz) 부등식은 내적(inner product) $\langle f, g\rangle = \int fg$가 $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|\,\|g\|$를 만족하며, 등호는 f와 g가 비례할 때 그리고 그때에만 성립한다는 것이다. 이 부등식은 $\mathbb{R}^n$의 벡터에서 함수들의 공간에 이르기까지 모든 내적 공간(inner product space)에서 성립하며, "두 함수 사이의 각"이라는 개념이 의미를 갖게 해 주는 것이 바로 이 부등식이다. 이 생각은 푸리에 급수(Fourier series)와 최소제곱 근사(least-squares approximation)의 바탕이 된다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 내적과 직교성을 전개하며, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 이러한 부등식이 적분을 제어하는 데 어떻게 쓰이는지 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.