풀이

STEP II 2017, 문제 3

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP II 2017, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q3

핵심 아이디어

방정식 $\sin y = k$의 해는 결코 하나뿐이 아니다. y_0이 해이면 $\pi - y_0$도 해이고, 이들과 2π의 정수배만큼 차이 나는 값도 모두 해이다. 따라서 이 문제의 그래프는 모두 하나의 기본 곡선을 몇 개 복사하여 사인 함수의 대칭성(symmetry)에 따라 배치한 것이다. 소문항 (i)은 이 패턴을 직선으로 보여 준다. (ii)에서는 미적분으로 기본 조각 $y = \arcsin(\frac{1}{2}\sin x)$의 모양을 정확히 정하고, 나머지는 대칭성이 해결한다. 소문항 (iii)은 $\cos y$를 사인으로 바꾸어 쓰면 (ii)와 같은 문제가 된다.

풀이

소문항 (i)

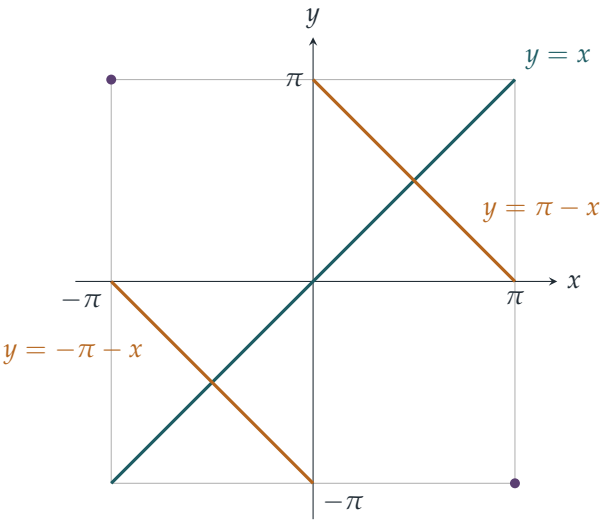
$\sin y = \sin x$인 것은 정확히 다음과 같을 때이다.

$$y = x + 2k\pi \qquad \text{또는} \qquad y = \pi - x + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

이제 이 직선들 가운데 어느 것이 정사각형 $-\pi \le x, y \le \pi$와 만나는지 살펴본다.

- $y = x$는 $(-\pi, -\pi)$에서 (π, π)까지 대각선 전체를 지난다.
- $y = x \pm 2\pi$이려면 $y - x = \pm 2\pi$이어야 한다. 정사각형 안에서는 $|y - x| \le 2\pi$이고 등호는 꼭짓점에서만 성립하므로, 이 직선들은 두 고립점(isolated point) $(-\pi, \pi)$와 $(\pi, -\pi)$만을 준다.
- $x + y = \pi$는 $(0, \pi)$에서 $(\pi, 0)$까지의 선분이고, $x + y = -\pi (k = -1$인 경우$)$는 $(-\pi, 0)$에서 $(0, -\pi)$까지의 선분이다.
- $|x + y| \le 2\pi$이므로 $x + y = 3\pi$ 또는 -3π는 불가능하다.

따라서 구하는 집합은 대각선 $y = x, x + y = \pm\pi$의 두 선분, 그리고 두 꼭짓점 $(-\pi, \pi)$와 $(\pi, -\pi)$이다.



고립된 꼭짓점들은 놓치기 쉽다. $\sin(\pm\pi) = 0$이므로 이들은 진짜 해이다.

소문항 (ii)

$\sin y = \frac{1}{2}\sin x$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $y' \cos y = \frac{1}{2}\cos x$를 얻는다. $0 \le y \le \frac{1}{2}\pi$에서는 $\cos y \ge 0$이므로

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - \sin^2 x},$$

이고, 이 값은 결코 0이 아니다. 따라서

$$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}.$$

$s = \sin x$라 하자. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{4 - s^2} = \dfrac{-s\cos x}{\sqrt{4 - s^2}}$를 이용하여 몫의 미분법(quotient rule)을 적용하면

$$y'' = \frac{-\sin x\sqrt{4 - s^2} - \cos x \cdot \dfrac{-s\cos x}{\sqrt{4 - s^2}}}{4 - s^2} = \frac{-s(4 - s^2) + s\cos^2 x}{(4 - s^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{s\left(-4 + s^2 + 1 - s^2\right)}{(4 - s^2)^{3/2}} = -\frac{3\sin x}{(4 - \sin^2 x)^{3/2}},$$

이다. 여기서 $\cos^2 x = 1 - s^2$를 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

기본 조각. 이 4분의 1 정사각형 안에서 곡선은 $y = f(x)$이고, 여기서 $f(x) = \arcsin(\frac{1}{2}\sin x)$이다. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$이므로 곡선은 $(0,0)$에서 시작하여 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$에서 끝나며, 위쪽 변 $y = \frac{1}{2}\pi$ 근처에는 가지 않는다. 기울기는 원점에서 $\frac{1}{2}$이고 $x = \frac{1}{2}\pi$에서 0으로 줄어든다. 또 $0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$에서 $y'' < 0$이고 $x = 0$에서 $y'' = 0$이므로, 곡선은 위로 볼록(concave)하고 증가하며 원점에서 변곡점(point of inflection)을 갖는다.

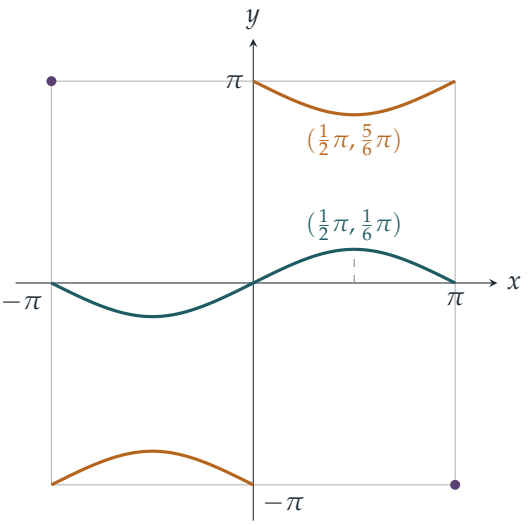
생각해 보기 미적분을 더 하지 않고 이 작은 호로부터 정사각형 전체의 그래프를 어떻게 얻을 수 있을까?

대칭성을 이용한다. $\sin(\pi - x) = \sin x$이고 f는 기함수(odd function)이므로, $[-\pi, \pi]$에서 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $x = \frac{1}{2}\pi$에 대하여 대칭이고 원점에 대하여 회전대칭이다. 이 그래프는 $(-\pi, 0)$, $(0,0)$, $(\pi, 0)$을 지나는 완만한 물결 모양이며, 최댓점은 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$, 최솟점은 $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{6}\pi)$이다. 기울기는 원점에서 $\frac{1}{2}$이고 $x = \pm\pi$에서 $-\frac{1}{2}$이다.

(i)에서처럼 전체 해집합은 $y = f(x) + 2k\pi$ 또는 $y = \pi - f(x) + 2k\pi$로 주어진다. 정사각형 안에 남는 것은 다음과 같다.

- 모든 $-\pi \leq x \leq \pi$에 대한 물결 $y = f(x)$;
- $y = \pi - f(x)$. 이것은 $f(x) \geq 0$인 곳, 곧 $0 \leq x \leq \pi$에서만 정사각형 안에 있다. 이는 $(0, \pi)$에서 (π, π)까지 아래로 처진 아치이고, 가장 낮은 점은 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi)$이다;
- $y = -\pi - f(x)$. 이것은 $f(x) \leq 0$인 곳, 곧 $-\pi \leq x \leq 0$에서만 정사각형 안에 있다. 이는 $(-\pi, -\pi)$에서 $(0, -\pi)$까지 위로 솟은 아치이고, 가장 높은 점은 $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{5}{6}\pi)$이다;
- 고립된 꼭짓점 $(-\pi, \pi)$와 $(\pi, -\pi)$. 이들은 각각 $x = -\pi$에서의 $y = \pi - f(x)$와 $x = \pi$에서의 $y = -\pi - f(x)$로부터 나온다.

k의 다른 값들은 $|y| > \pi$를 준다. 아치들은 직선 $y = \pm\pi$와 기울기 $\pm\frac{1}{2}$로 만나며, 물결을 반 바퀴 회전시킨 뒤 위나 아래로 옮긴 것이다. (i)과 비교해 보자. 대각선은 납작해져 물결이 되었고, 두 선분은 휘어져 아치가 되었다.



소문항 (iii)

? **생각해 보기** $\cos y$를 이미 그려 본 것으로 어떻게 바꿀 수 있을까?

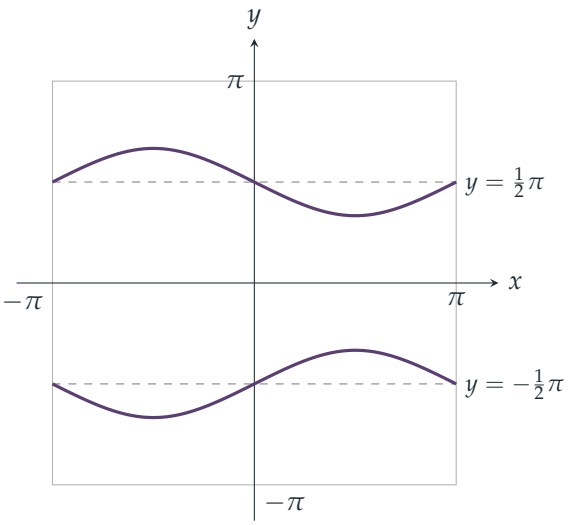
$\cos y = \sin(\frac{1}{2}\pi - y)$로 쓴다. 그러면 $\cos y = \frac{1}{2}\sin x$는 $u = \frac{1}{2}\pi - y$가 $\sin u = \frac{1}{2}\sin x$를 만족한다는 뜻이므로, $u = f(x) + 2k\pi$ 또는 $u = \pi - f(x) + 2k\pi$이다. 곧

$$y = \tfrac{1}{2}\pi - f(x) - 2k\pi \qquad \text{또는} \qquad y = f(x) - \tfrac{1}{2}\pi - 2k\pi.$$

$|f(x)| \le \frac{1}{6}\pi$이므로 $[-\pi, \pi]$ 안의 값을 주는 것은 $k = 0$뿐이며, 이때는 모든 x에 대하여 그렇다. 따라서 구하는 집합은 정확히 두 개의 완전한 물결로 이루어진다.

- $y = f(x) - \frac{1}{2}\pi$: (ii)의 물결을 $\frac{1}{2}\pi$만큼 아래로 옮긴 것으로, $-\frac{2}{3}\pi$와 $-\frac{1}{3}\pi$ 사이에서 진동한다;
- $y = \frac{1}{2}\pi - f(x)$: 앞의 물결을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다($\cos y$는 y에 대하여 우함수이므로 당연히 그래야 한다). 최솟점은 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$, 최댓점은 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi)$이다.

이번에는 고립점이 없다.



검산

- 표본점: $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$에서 $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\pi$이고, $(\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi)$도 성립한다. (iii)에서 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$는 $\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$를 준다.
- $x = 0$에서 공식은 $y' = \frac{1}{2}$를 주며, 이는 작은 각 근사(small-angle approximation) $y \approx \frac{1}{2}x$와 일치한다. $x = \frac{1}{2}\pi$에서는 $y' = 0$을 주는데, 최댓점에서는 당연히 그래야 한다.
- 컴퓨터로 $(0, \frac{1}{2}\pi)$의 임의의 점들에서 유한 차분(finite differences)을 이용하여 y'과 y''의 공식을 확인하였다. 또 많은 임의의 x에 대하여 모든 해 $y \in [-\pi, \pi]$를 찾았고, 그 결과는 위의 가지들과 일치하였다. 곧 (ii)에서는 $x \neq 0, \pm\pi$일 때 두 개, (iii)에서는 항상 두 개였다.

흔한 실수

- (i)과 (ii)에서 꼭짓점 $(-\pi, \pi)$와 $(\pi, -\pi)$를 빠뜨리는 것.
- (ii)의 아치를 $[-\pi, \pi]$ 전체에 걸쳐 그리는 것. $y = \pi - f(x)$는 $f(x) < 0$이 되자마자 정사각형을 벗어난다.
- $\cos y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - \sin^2 x}$로 잡는 것. 부호는 $0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$에 의해 정해진다.

STEP 너머

$\{(x,y) : F(x,y) = 0\}$과 같은 집합을 **등위 집합**(*level set*)이라 한다. 음함수 정리(implicit function theorem)에 따르면, 이 집합은 $\partial F/\partial y \neq 0$인 곳에서는 국소적으로 매끄러운 그래프이다. 여기서 이 조건은 정확히 $\cos y = 0$인 곳에서 깨지는데, $|\sin y| \leq \frac{1}{2}$일 때는 그런 일이 결코 일어나지 않으므로 (ii)의 곡선들은 x에 대한 매끄러운 그래프이다. (i)에서 교차점들은 $\sin y - \sin x$의 두 편도함수(partial derivative)가 모두 0이 되는 곳이며, 바로 그곳에서 등위 집합은 곡선이 되지 못한다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 일변수 해석학의 기초를 다져 주고, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 생동감 있는 길잡이가 된다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.