풀이

STEP II 2017, 문제 2

순수수학 • 주기수열

> **STEP II 2017, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q2

핵심 아이디어

사상(map)을 자기 자신과 합성(compose)하고 정리한다. 점화식(recurrence)을 두 번 적용하면 정확히 같은 "일차식 나누기 일차식" 꼴의 사상이 다시 나오므로, 네 단계는 두 단계를 두 번 적용한 것일 뿐이다. $x_{n+k} = x_n$인지 물을 때마다 분모를 없애면 x_n에 대한 이차식이 나오고, 그 이차식은 인수분해(factorise)된다. 그 인수 가운데 하나는 언제나 $x^2 + (b-a)x + 1$이며, 이 식의 근은 바로 점화식의 **고정점**(*fixed point*), 즉 상수 수열을 만드는 값이다. 이것을 알아차리는 것이 두 소문항을 모두 해결하는 열쇠이다.

풀이

$f(x) = \dfrac{ax-1}{x+b}$라 두면 $x_{n+1} = f(x_n)$이다. 그러면

$$x_{n+2} = \frac{a\dfrac{ax_n - 1}{x_n + b} - 1}{\dfrac{ax_n - 1}{x_n + b} + b}.$$

분자와 분모에 $x_n + b$(가정에 의해 0이 아니다)를 곱하면

$$x_{n+2} = \frac{a(ax_n - 1) - (x_n + b)}{(ax_n - 1) + b(x_n + b)} = \boxed{\frac{(a^2-1)x_n - (a+b)}{(a+b)x_n + b^2 - 1}}$$

을 얻는다.

여기서 한 가지 사실을 더 적어 두는 것이 좋다. 값 x가 고정점($f(x) = x$)일 필요충분조건은 $ax - 1 = x^2 + bx$, 즉

$$q(x) \equiv x^2 + (b-a)x + 1 = 0. \qquad (*)$$

이다. x_0이 q의 근이면 $x_1 = x_0$이고, 이후로도 계속 마찬가지이다. 즉 수열은 상수이고 주기(period)는 1이다.

소문항 (i)

수열의 주기가 2라고 하자. 그러면 특히 $x_2 = x_0$이다. x_{n+2}에 대한 식에 $x = x_0$을 넣고 분모를 없애면

$$\begin{aligned} 0 &= (a^2-1)x - (a+b) - x[(a+b)x + b^2 - 1] \\ &= -(a+b)x^2 + (a^2-b^2)x - (a+b) \\ &= -(a+b)[x^2 + (b-a)x + 1], \end{aligned}$$

이다. 여기서 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$를 이용하였다. 따라서 $(a+b)\,q(x_0) = 0$이다.

? 생각해 보기 왜 "$q(x_0) = 0$은 x_0의 한 값에 불과하다"라고 말하고 끝낼 수 없을까?

x_0은 하나의 수이고, 그것이 q의 근이 되는 것을 막는 것은 아무것도 없기 때문이다. 이 경우를 배제하는 것은 $(*)$의 의미이다. $q(x_0) = 0$이면 x_0은 고정점이므로 $x_1 = x_0$이고, 모든 n에 대해 $x_{n+1} = x_n$이다. 이는 주기 1이며, 주기 2의 정의가 이를 금한다($m = 1$을 택하면 된다). 따라서 $q(x_0) \neq 0$이고, 그러므로

$$a + b = 0$$

은 주기 2이기 위한 필요조건이다.

(역으로 $b = -a$이면 두 단계 식은 $x_{n+2} = \dfrac{(a^2-1)x_n}{a^2-1} = x_n$으로 줄어든다. 여기서 $a^2 = 1$인 경우는 일어날 수 없는데, 그렇다면 $a = 1$, $b = -1$일 때 $x_1 = 1$이고 $a = -1$, $b = 1$일 때 $x_1 = -1$이 되어 어느 쪽이든 $x_1 + b = 0$이 되며, 이는 배제된 경우이기 때문이다.)

소문항 (ii)

$A = a^2 - 1$, $B = b^2 - 1$, $c = a + b$라 두면 $g(x) = \dfrac{Ax - c}{cx + B}$에 대해 $x_{n+2} = g(x_n)$이다. g를 두 번 적용하고 다시 분자와 분모에 $cx + B$를 곱하면

$$x_{n+4} = \frac{A(Ax_n - c) - c(cx_n + B)}{c(Ax_n - c) + B(cx_n + B)} = \frac{(A^2 - c^2)x_n - c(A+B)}{c(A+B)x_n + B^2 - c^2}.$$

이다. 이제 $x_{n+4} = x_n$이 성립할 필요충분조건은

$$\begin{aligned} 0 &= (A^2 - c^2)x_n - c(A+B) - x_n[c(A+B)x_n + B^2 - c^2] \\ &= -c(A+B)x_n^2 + (A^2 - B^2)x_n - c(A+B) \\ &= -(A+B)[c\,x_n^2 + (B-A)x_n + c]. \end{aligned}$$

이다. $B - A = b^2 - a^2 = (b-a)(a+b) = (b-a)c$이므로 대괄호 안의 식은 $c\,q(x_n)$이고, 따라서

$$x_{n+4} = x_n \iff (a^2 + b^2 - 2)\,(a+b)\,q(x_n) = 0.$$

필요성(*necessity*). 주기가 4라고 하자. 수열은 상수가 아니므로 x_0은 고정점이 아니고 $q(x_0) \neq 0$이다. $a + b = 0$이면 소문항 (i)의 역에 의해 $x_2 = x_0$이고, 실제로 모든 n에 대해 $x_{n+2} = x_n$이 되어 주기 4에 모순이다. 따라서 $a + b \neq 0$이고, $n = 0$일 때의 인수분해로부터 반드시

$$a^2 + b^2 = 2.$$

이다.

충분성(*sufficiency*). $a^2 + b^2 = 2$라고 하자. 그러면 $A + B = 0$이므로 모든 n에 대해 $x_{n+4} = x_n$이다. 이보다 작은 m은 성립하지 않음을 확인해야 한다.

- $a + b \neq 0$이다. 그렇지 않으면 $a^2 = b^2 = 1$이고, 소문항 (i)에서와 같이 $x_1 + b = 0$이 되는데, 이는 배제된 경우이다.
- 실수 고정점이 없다. q의 판별식(discriminant)은 $(b-a)^2 - 4 = (a^2+b^2) - 2ab - 4 = -2(1+ab)$이고, $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2) = 1$이며, $ab = -1$인 것은 $(a,b) = \pm(1,-1)$일 때뿐인데 이는 방금 배제하였다. 따라서 $ab > -1$이고 판별식은 음수이므로 모든 실수 x_n에 대해 $q(x_n) \neq 0$이다. 그러므로 $m = 1$은 성립하지 않는다.
- $m = 2$: 소문항 (i)에 의해 $x_2 = x_0$이려면 $(a+b)q(x_0) = 0$이어야 하는데, 이는 거짓이다. 그러므로 $m = 2$는 성립하지 않는다.
- $m = 3$: 모든 n에 대해 $x_{n+3} = x_n$이면, 모든 n에 대해 $x_{n+1} = x_{(n+1)+3} = x_{n+4} = x_n$이 되어 주기가 1이 되는데, 이는 방금 배제하였다.

그러므로 실수 a, b, x_0에 대하여(문제에서 허용하듯 분모는 0이 아니라 할 때), 수열의 주기가 4일 필요충분조건은

$$\boxed{a^2 + b^2 = 2.}$$

이다. 시작값 x_0은 이 조건에 아무런 역할도 하지 않는다.

검산

$a = \sqrt{2}, b = 0, x_0 = 1$로 두자. 수열은

$$1, \quad \sqrt{2}-1, \quad -1, \quad \sqrt{2}+1, \quad 1, \ldots$$

과 같이 진행하며, 주기는 정확히 4이다. 예를 들어 $f(-1) = (-\sqrt{2}-1)/(-1) = \sqrt{2}+1$이다. 컴퓨터로 무작위 유리수 a, b, x_0 수천 개에 대해 두 단계 식과 네 단계 식이 정확히 맞음

을 확인하였다. 또한 원 $a^2 + b^2 = 2$ 위의 무작위 점 약 이천 개에 대해 주기가 4임을 확인하였고, 이 원 밖의 무작위 (a, b)에 대해서는 네 단계 후에 처음 값으로 돌아오지 않음을 확인하였다.

흔한 실수

- $(a + b)q(x_0) = 0$으로부터 왜 $q(x_0) \neq 0$인지 설명하지 않고 $a + b = 0$이라고 결론짓는 것. 고정점이라는 해석이 그 이유이다.
- 주기가 실제로는 1이나 2가 아닌지 확인하지 않고 $a^2 + b^2 = 2$를 주기 4의 답으로 제시하는 것.
- 소문항 (ii)의 대괄호에서 인수 $a + b$를 빠뜨려, 주기 2인 경우 $a + b = 0$이 잘못하여 주기 4를 주는 것처럼 보이게 되는 것.

STEP 너머

사상 $x \mapsto \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$를 **뫼비우스 변환**(*Möbius transformation*)이라 한다. 이러한 사상 두 개를 합성하는 것은 그에 대응하는 2×2 행렬(matrix), 여기서는 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$를 곱하는 것에 해당한다. 이 사상의 주기가 k일 필요충분조건은 행렬의 k제곱이 항등행렬(identity matrix)의 상수배가 되는 것이며, 이는 비 $(\text{대각합})^2/\det = (a + b)^2/(ab + 1)$에 의해 결정된다. 주기 4는 이 값이 2인 경우에 해당하며, 이는 모습을 바꾼 "$\pi/4$만큼의 회전"이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*에는 뫼비우스 변환에 관한 아름다운 장이 있고, Strang의 *Introduction to Linear Algebra*는 그 바탕에 있는 고윳값(eigenvalue)에 관한 아이디어를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.