풀이

STEP II 2017, 문제 11

역학 • 포물체와 에너지

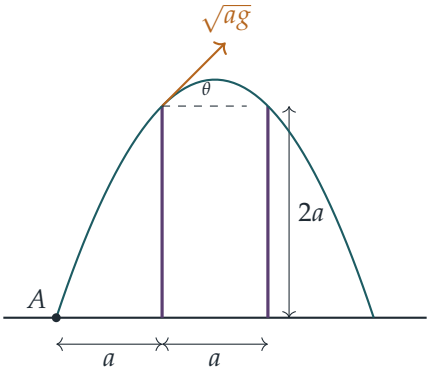
> **STEP II 2017, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q11

핵심 아이디어

입자가 첫 번째 벽의 꼭대기와 같은 높이에 이르면, 그 뒤의 비행은 새로운 포물체(projectile) 문제가 된다. 입자는 높이 $2a$에서 알려진 속력으로 출발하고, 수평 거리 a만큼 더 나아간 뒤에도 여전히 높이 $2a$ 이상에 있어야 한다. 에너지(energy)를 이용하면 투사각(angle of projection)을 몰라도 그 속력을 구할 수 있다. 궤적(trajectory)을 $\tan\theta$로 나타내면 "두 번째 벽을 넘을 수 있는가?"라는 질문이 "$\tan\theta$에 대한 이차식(quadratic)이 실근(real root)을 갖는가?"라는 질문으로 바뀌고, 이것으로 두 소문항을 한꺼번에 다룰 수 있다.

풀이

각 입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 질점(point mass)으로 모형화한다. x축은 수평 방향(벽 쪽)으로, y축은 연직 위쪽으로 잡는다.



소문항 (i)

첫 번째 벽 위에서의 속력. 일을 하는 힘은 중력뿐이므로 운동에너지(kinetic energy)와 위치에너지(potential energy)의 합은 일정하다. 지면에서 높이 $2a$까지 올라가고 벽 꼭대기에서의 속력을 v라 하면

$$\tfrac{1}{2}m(5ag) = \tfrac{1}{2}mv^2 + mg(2a) \quad \Longrightarrow \quad v^2 = 5ag - 4ag = ag,$$

이므로 입자는 속력 $\sqrt{ag}$로 첫 번째 벽 위를 지난다.

각. 입자가 첫 번째 벽 위를 지날 때 속도가 수평 위쪽으로 이루는 각을 θ라 하자. 입자는 나중에(두 번째 벽 위에서) 다시 높이 $2a$에 있으므로 이때 아직 올라가는 중이어야 하고, 따라서 $\theta > 0$이다. 첫 번째 벽의 꼭대기를 기준으로 재면, 수평 거리 X만큼 나아간 뒤 벽 꼭대기 높이 위로의 높이는

$$Y = X\tan\theta - \frac{gX^2}{2v^2\cos^2\theta} = X\tan\theta - \frac{X^2}{2a}\,(1+\tan^2\theta),$$

이다. 여기서 $v^2 = ag$와 $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$를 이용하였다. 두 번째 벽을 아슬아슬하게 넘는다는 것은 $X = a$에서 $Y = 0$이라는 뜻이다.

$$a\tan\theta - \tfrac{a}{2}(1+\tan^2\theta) = 0 \iff \tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 = 0 \iff (\tan\theta - 1)^2 = 0.$$

따라서 $\tan\theta = 1$이고, 요구한 대로 $\theta = 45^\circ$이다. (같은 내용을 다르게 보면, 높이 $2a$에서 다시 $2a$로 돌아오는 수평면 위의 사정거리는 $v^2\sin 2\theta/g = a\sin 2\theta$이고, 이것은 $\sin 2\theta = 1$일 때만 a와 같다.)

***A*까지의 거리.** 속도의 수평 성분은 변하지 않으며, 첫 번째 벽 위에서 그 값은 $\sqrt{ag}\cos 45^\circ = \sqrt{ag/2}$이다. 그곳에서 연직 성분도 위쪽으로 $\sqrt{ag/2}$이다. A에서의 연직 성분 u는 $u^2 = \frac{1}{2}ag + 2g(2a) = \frac{9}{2}ag$를 만족하므로 $u = 3\sqrt{ag/2}$이다. (검산하면 $\frac{1}{2}ag + \frac{9}{2}ag = 5ag$로 발사 속력과 맞는다.) A에서 첫 번째 벽까지 걸리는 시간은

$$t = \frac{u - \sqrt{ag/2}}{g} = \frac{2\sqrt{ag/2}}{g},$$

이고, 그동안 나아간 수평 거리는

$$\sqrt{\tfrac{ag}{2}}\cdot\frac{2\sqrt{ag/2}}{g} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}ag}{g} = a.$$

이다. 따라서 A는 첫 번째 벽의 밑동에서 거리 a만큼 떨어져 있다.

소문항 (ii)

이제 입자는 높이 $2a+h$에서 첫 번째 벽 위를 지난다. 에너지에 의해 그곳에서의 속력 w는

$$w^2 = 5ag - 2g(2a+h) = g(a-2h).$$

를 만족한다. 입자는 벽 쪽으로 움직이므로 수평 속도가 0이 아니고 $w^2 > 0$이다. 따라서 $h < \frac{1}{2}a$이다.

그곳에서 입자의 운동 방향이 수평과 이루는 각을 ϕ라 하고 $T = \tan\phi$로 놓자. 첫 번째 벽 위에서의 입자 위치를 기준으로 재면, 수평 거리 X만큼 나아간 뒤 그 점 위로의 높이는

$$Y = XT - \frac{gX^2}{2w^2}(1+T^2) = XT - kX^2(1+T^2)/a^2, \qquad \text{여기서} k = \frac{ga^2}{2w^2} = \frac{a^2}{2(a-2h)}.$$

이다. 두 번째 벽에서는 $X = a$이므로 $Y = aT - k(1+T^2)$이다. 그 벽을 넘으려면 입자의 높이가 $2a$ 이상, 즉 $Y \geq -h$이어야 한다.

$$aT - k(1+T^2) + h \geq 0 \iff kT^2 - aT + (k-h) \leq 0.$$

생각해 보기 우리는 ϕ를 모른다. 어떤 방향도 **불가능하다**는 것을 어떻게 보일 수 있을까?

$k > 0$이므로 이차식 $kT^2 - aT + (k-h)$의 그래프는 아래로 볼록하다. 이 이차식이 어떤 실수 T에서 ≤ 0인 값을 가지려면 판별식(discriminant)이 음이 아니어야 한다. 그 판별식은

$$\Delta = a^2 - 4k(k-h) = a^2 - \frac{a^4}{(a-2h)^2} + \frac{2a^2h}{a-2h}.$$

이다. 양수 $(a-2h)^2/a^2$를 곱하면

$$\frac{(a-2h)^2}{a^2}\Delta = (a-2h)^2 - a^2 + 2h(a-2h) = -2ah.$$

이다. $a > 0$이고 $h > 0$이므로 이 값은 음수이고, 따라서 $\Delta < 0$이다. 그러면 모든 실수 T에 대해 $kT^2 - aT + (k-h) > 0$이므로, 첫 번째 벽 위에서 입자가 어떤 방향으로 움직이든 두 번째 벽에 이르렀을 때 높이 $2a$보다 아래에 있다. 입자는 두 번째 벽을 넘지 못한다.

$h = 0$이면 $\Delta = 0$이 되고 이중근(double root) $T = a/(2k) = 1$을 얻는다는 점에 주목하자. 이것이 바로 소문항 (i)의 45°이다.

검산

- 소문항 (i)에서 A에서의 성분은 $\sqrt{ag/2}$와 $3\sqrt{ag/2}$이고, 그 제곱의 합은 $5ag$이다. $a = 1.7\,\mathrm{m}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 놓고 A에서부터 시간에 따라 운동을 단계별로 계산해 나가면 두 벽에서 모두 높이 $2.000a$를 얻는다.
- 궤적은 최고점에 대해 대칭이며, 소문항 (i)에서 최고점은 두 벽의 한가운데, 즉 A로부터 수평 거리 $1.5a$인 곳에 있다. 따라서 입자는 A에서 $3a$ 떨어진 곳, 곧 두 번째 벽 너머 거리 a인 곳에 떨어진다. 그림이 대칭이다.
- 소문항 (ii)에 대해, 속력 $\sqrt{5ag}$로 수천 개의 무작위 발사각과 발사 지점을 컴퓨터로 확인해 보았지만, 첫 번째 벽 위를 지나면서 두 번째 벽도 넘는 경우는 하나도 없었다.

흔한 실수

- 소문항 (i)의 θ가 A에서의 투사각이 아니라 첫 번째 벽 위에서의 각이어야 한다는 것을 잊는 실수(투사각은 $\tan\alpha = 3$을 만족한다).
- 소문항 (ii)에서 특정한 각 하나(예를 들어 $45°$)만 확인하는 실수. 주장은 가능한 모든 방향에 대한 것이며, 그래서 판별식이 필요하다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 첫 번째 벽 위의 한 점에서 이 에너지를 가진 입자가 두 번째 벽의 꼭대기에 겨우 닿을 수 있을 뿐임을 말해 준다. 즉 그 벽 꼭대기는 도달 가능한 영역의 경계 위에 있다. 주어진 점에서 주어진 속력으로 도달할 수 있는 모든 점은 **포락선**(envelope) 또는 **안전 포물선**(safety parabola)이라 불리는 포물선의 안쪽에 있고, 그 포물선 위의 점에는 정확히 하나의 궤적만이 도달하는데, 이것이 여기서 본 이중근이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 수준에서 포물체와 에너지 방법을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.