풀이

STEP II 2017, 문제 10

역학 • 저항에 대해 한 일

> **STEP II 2017, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q10

핵심 아이디어

뉴턴(Newton)의 제2법칙(Newton's second law)으로 각 지점에서의 구동력(driving force)을 구할 수 있고, 엔진이 한 일(work)은 그 힘을 거리에 대해 적분(integral)한 값이다. 가속도(acceleration)가 일정할 때는 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a$를 이용하여 x에 대한 적분을 v에 대한 적분으로 바꿀 수 있다. 유일하게 미묘한 점은 엔진은 밀 수만 있고 당길 수는 없다는 것이다. 필요한 힘이 음수가 되면 그 역할은 브레이크가 맡고 엔진은 아무 기여도 하지 않으므로, 구동력이 양수인 구간에서만 적분한다.

풀이

자동차를 x축을 따라 움직이는 입자로 모형화하고, 엔진의 구동력을 F라 하자. 자동차가 앞으로 움직이는 동안 저항(resistance) $Av^2 + R$는 뒤쪽으로 작용한다.

전반부. 뉴턴의 제2법칙에 의해 $F - (Av^2 + R) = ma$이므로

$$F = ma + R + Av^2,$$

이고, 이 값은 전 구간에서 양수이다. 힘 F가 그 작용점(point of application)을 $\mathrm{d}x$만큼 움직일 때 한 일은 $F\,\mathrm{d}x$이므로, 전반부에서 엔진이 한 일은

$$\int_0^d (ma + R + Av^2)\,\mathrm{d}x,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. 변수 변환(change of variable)을 위해, 가속도가 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a$이므로 $\mathrm{d}x = \frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$이다. $v^2 = 2ax$ (정지 상태에서 출발한 등가속도 운동)이므로 v는 $x = 0$에

서 0부터 $x = d$에서 $\sqrt{2ad} = w$까지 변한다. 따라서 한 일은

$$\int_0^w \frac{(ma + R + Av^2)\, v}{a}\, \mathrm{d}v,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. 이를 계산하고 $w^2 = 2ad$를 이용하면 다음을 얻는다.

$$W_1 = \frac{1}{a}\left[\frac{(ma+R)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_0^w = \frac{(ma+R)w^2}{2a} + \frac{Aw^4}{4a} = (ma+R)d + Aad^2.$$

후반부. 이제 가속도는 $-a$이므로 $F - (Av^2 + R) = -ma$이고, 따라서

$$F = Av^2 + R - ma.$$

자동차는 w에서 0으로 감속하며, $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -a$이므로 $\mathrm{d}x = -\frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$이다. $F > 0$이고 속력이 v_1에서 v_2로 줄어드는 (단, $v_1 > v_2$) 임의의 구간에서 엔진이 한 일은 다음과 같다.

$$\int_{v_1}^{v_2} F\left(-\frac{v}{a}\right)\mathrm{d}v = \int_{v_2}^{v_1} \frac{(Av^2 + R - ma)\, v}{a}\,\mathrm{d}v. \qquad (*)$$

소문항 (i)

$R > ma$이면 모든 v에 대하여 $F = Av^2 + (R - ma) > 0$이므로, 엔진은 후반부 내내 일을 한다. $v_1 = w$, $v_2 = 0$으로 놓고 $(*)$를 적용하면

$$W_2 = \frac{1}{a}\left[\frac{(R-ma)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_0^w = (R-ma)d + Aad^2.$$

두 값을 더하면 $ma\,d$ 항이 상쇄되어 전체 일은

$$W_1 + W_2 = 2Aad^2 + 2Rd,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

이제 $R < ma$이므로, $F = Av^2 - (ma - R)$는 정확히 다음일 때 0이 된다.

$$v = u, \qquad \text{단, } u^2 = \frac{ma - R}{A} > 0.$$

이 속력은 $u < w$일 때, 즉 $\frac{ma-R}{A} < 2ad$일 때 후반부 동안 실제로 도달되며, 이는 정확히 조건 $R > ma - 2Aad$와 같다. 따라서 자동차가 w에서 0으로 감속하는 동안 F는 $v > u$인 동안 양수이고, 속력 u에서 0이 되며, $v < u$에서는 음수(제동)가 된다. 이로써 첫 번째 주장이 증명된다.

? 생각해 보기 왜 (i)의 답을 그대로 다시 쓸 수 없을까?

(i)의 적분은 후반부 전체에 걸쳐 $F\,\mathrm{d}x$를 더한 것이다. 여기서는 $v < u$일 때 F가 음수이므로, 그 구간은 전체에서 빼는 역할을 하게 된다. 그러나 엔진이 그 구간에서 음의 일을 하는 것은 아니다. 엔진은 아무것도 하지 않고, 브레이크가 일을 넘겨받는다. 따라서 적분을 $v = u$에서 멈춘다. $v_1 = w$, $v_2 = u$로 놓고 $(*)$를 적용하면

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{a}\left[\frac{(R-ma)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_u^w \\ &= (R-ma)d + Aad^2 - \frac{1}{a}\left(\frac{(R-ma)u^2}{2} + \frac{Au^4}{4}\right). \end{aligned}$$

$Au^2 = ma - R$를 대입하면 괄호 안은

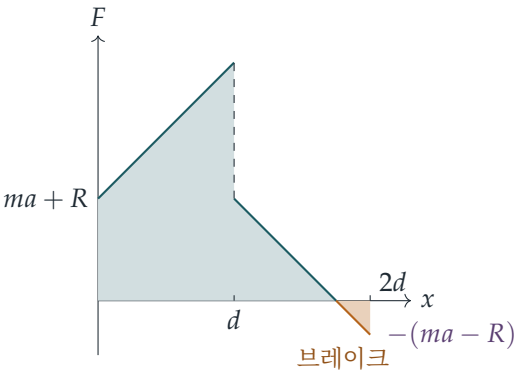
$$-\frac{(ma-R)^2}{2A} + \frac{(ma-R)^2}{4A} = -\frac{(ma-R)^2}{4A},$$

이므로 $W_2 = (R-ma)d + Aad^2 + \frac{(ma-R)^2}{4Aa}$이다. 전반부는 변하지 않으므로(그 구간에서는 항상 $F > 0$), 전체 일은

$$W_1 + W_2 = 2Aad^2 + 2Rd + \frac{(ma-R)^2}{4Aa},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

그림으로 보기. 전반부에서는 $v^2 = 2ax$이고 후반부에서는 $v^2 = 2a(2d-x)$이므로, F는 각 구간에서 x의 **일차**함수(linear function)이고, 엔진이 한 일은 그래프의 양수 부분 아래의 넓이이다. (ii)의 경우 그래프는 끝 부근에서 축 아래로 내려간다. 빠진 삼각형의 높이는 $ma - R$이고, F가 단위 거리당 $2Aa$의 비율로 감소하므로 밑변은 $\frac{ma-R}{2Aa}$이다. 그 넓이 $\frac{(ma-R)^2}{4Aa}$이 바로 추가된 항이다.



검산

- 경계 $R = ma$에서는 추가 항이 사라지므로 (i)과 (ii)의 답이 일치한다. 이때 F는 맨 끝에서야 O에 도달하므로 당연히 그래야 한다.
- 다른 경계 $R = ma - 2Aad$에서는 $u = w$이고, 엔진은 후반부에 아무 일도 하지 않으므로 전체 일은 $W_1 = (ma + R)d + Aad^2$이어야 한다. (ii)의 답에 $ma - R = 2Aad$를 대입하면 $2Aad^2 + 2Rd + Aad^2 = 2Rd + 3Aad^2$이고, $(ma + R)d + Aad^2 = 2Rd + 2Aad^2 + Aad^2$ 역시 같으므로 두 값은 일치한다.
- 수치로 확인하면, $m = a = 1$, $A = \frac{1}{2}$, $d = 2$, $R = \frac{1}{2}$ (위 그림의 경우)일 때 (ii)의 공식은 $4 + 2 + \frac{1}{8} = 6.125$를 주고, 전체 주행에 걸쳐 F의 양수 부분을 직접 수치적분해도 같은 값이 나온다.
- 단위: Aad^2, Rd, $(ma - R)^2/(Aa)$는 모두 힘에 거리를 곱한 것이므로 모두 에너지이다.

흔한 실수

- 후반부에서 $\mathrm{d}x = -\frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$이어서 적분의 위끝과 아래끝이 뒤바뀐다는 점을 잊는 것. 여기서 부호를 틀리면 후반부의 일이 음수가 된다.
- (ii)에서 F의 음수 부분까지 적분하는 것. 그러면 (i)의 답이 그대로 다시 나올 뿐이다.
- 자동차가 멈추기 전에 속력 u에 실제로 도달하는지 확인하지 않는 것. R의 하한이 바로 이를 보장한다.

STEP 너머

힘이 한 일은 선적분(line integral) $\int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$이며, 여기서 사용한 변수 변환은 일-에너지 정리(work–energy theorem)의 일차원 버전이다. Av^2 같은 저항은 보존력(conservative force)이 아니므로, 한 일은 출발점과 도착점뿐 아니라 어떻게 주행하는지에 따라 달라진다. 엔진의 "한쪽 방향으로만 작용하는" 성질은 주어진 거리를 가장 연료 효율적으로 주행하는 방법을 찾는 문제처럼, 최적 제어(optimal control) 문제에 나타나는 제약 조건을 미리 맛보게 해 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 일, 에너지, 그리고 속도에 의존하는 힘을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.