풀이

STEP II 2017, 문제 1

순수수학 • 점화 공식

> **STEP II 2017, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q1

핵심 아이디어

피적분함수에서 다루기 까다로운 부분은 $\arctan x$이지만, 그 도함수(derivative)는 유리함수이므로 $u = \arctan x$로 두고 부분적분(integration by parts)을 하면 이것이 $\frac{1}{1+x^2}$로 바뀐다. 그다음 (ii)의 요령은 두 적분을 짝지어 분자가 $x^{n+1}(1+x^2)$로 합쳐지게 하여 골치 아픈 분모가 약분되도록 하는 것이다. 그러면 n을 2씩 옮기는 점화식(reduction formula)을 얻는다. 이것을 두 번 쓰면 n이 4씩 옮겨지는데, 이것이 바로 (iii)의 귀납법(induction)에 필요한 것이다.

풀이

소문항 (i)

$u = \arctan x$, $\mathrm{d}v = x^n\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분한다. 그러면 $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$이다($n \geq 0$이므로 문제없다).

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

여기서 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$이고 경계항이 $x = 0$에서 0이 된다는 사실을 이용하였다. 양변에 $n+1$을 곱하면 구하는 결과를 얻는다.

$$(n+1)I_n = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$n = 0$일 때 남은 적분은 $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$이므로

$$I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

소문항 (ii)

(i)에서 n 대신 $n+2$를 넣은 식을 (i)의 원래 식에 더한다.

$$\begin{aligned}(n+3)I_{n+2} + (n+1)I_n &= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{x^{n+3} + x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+2},\end{aligned}$$

이는 $x^{n+3} + x^{n+1} = x^{n+1}(1+x^2)$이기 때문이다.

생각해 보기 이 공식은 I_4를 I_2와, I_2를 I_0와 연결한다. 어떤 n 값들이 필요한가?

$n = 0$과 $n = 2$가 필요하다.

$$\begin{aligned}n = 0: &\quad 3I_2 + I_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}, \\ n = 2: &\quad 5I_4 + 3I_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼면 I_2가 소거된다.

$$5I_4 = I_0 + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2, \qquad \text{따라서} \qquad I_4 = \frac{\pi + 1 - 2\ln 2}{20}.$$

소문항 (iii)

간단히 $S_n = \sum_{r=1}^{2n} \frac{(-1)^r}{r}$로 쓴다.

A 구하기. $n = 1$일 때 $S_1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$이므로, 주장은 $5I_4 = A + \frac{1}{4}$가 된다. (ii)에서 $5I_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$이므로

$$A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \;(= I_0),$$

로 잡아야 하고, 이 값이면 주장은 $n = 1$에서 성립한다.

귀납 단계. 어떤 $k \geq 1$에 대하여 $(4k+1)I_{4k} = A - \frac{1}{2}S_k$라고 가정하자. 우리는 I_{4k+4}에 도달하고 싶은데, 이는 (ii)의 공식을 두 번 적용한 거리에 있다. $n = 4k+2$와 $n = 4k$를 넣으면

$$\begin{aligned}(4k+5)I_{4k+4} + (4k+3)I_{4k+2} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4k+4}, \\ (4k+3)I_{4k+2} + (4k+1)I_{4k} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4k+2}.\end{aligned}$$

생각해 보기 필요 없는 I_{4k+2}를 어떻게 없앨 수 있는가?

이 항은 두 식에 같은 계수로 나타나므로, 첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면 사라진다.

$$(4k+5)I_{4k+4} = (4k+1)I_{4k} + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}.$$

한편 S_{k+1}은 S_k보다 항이 두 개 더 많은데, 바로 $r = 2k+1$(홀수이므로 음수)과 $r = 2k+2$(짝수이므로 양수)인 항이다.

$$-\frac{1}{2}S_{k+1} = -\frac{1}{2}S_k - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}\right) = -\frac{1}{2}S_k + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}.$$

귀납 가정을 이용하면

$$(4k+5)I_{4k+4} = A - \frac{1}{2}S_k + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} = A - \frac{1}{2}S_{k+1},$$

이고, 이것은 $n = k+1$일 때의 주장이다. 주장이 $n = 1$에서 성립하므로, 수학적 귀납법에 의해 $A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$일 때 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립한다.

검산

- 수치적으로 $I_0 \approx 0.438825$, $I_4 \approx 0.137765$이다. 원래 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 소수점 아래 열째 자리까지 일치한다.
- A가 I_0와 같으므로 (iii)의 공식은 $n = 0$일 때도 성립한다(이때 합은 빈 합이다). 좋은 신호이다.
- $n \to \infty$일 때 (i)의 적분은 0으로 수렴(converge)한다(피적분함수가 x^{n+1} 이하이므로). 따라서 $(4n+1)I_{4n} \to \frac{\pi}{4}$이다. 한편 $S_n \to -\ln 2$이므로 우변은 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4}$로 수렴한다. 극한에서 양변이 일치한다.

흔한 실수

- $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$로 써 놓고 두 번째 적분도 $n+1$로 나누는 것을 잊는 실수.
- 교대합의 새로운 두 항의 부호를 잘못 처리하는 실수: $r = 2k+1$은 홀수이므로 $(-1)^r = -1$이다.
- 기저 단계에서 A를 먼저 정하지 않고 귀납 단계를 증명하는 실수.

STEP 너머

마지막 검산에서는 교대 조화급수(alternating harmonic series) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$를 사용하였는데, 사실 이 문제는 그것을 증명하고 있다. (iii)의 항등식과 $(4n+1)I_{4n} \to \frac{\pi}{4}$라는 사실을 합치면 부분합이 $\ln 2$로 수렴할 수밖에 없다. $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$처럼 0으로 줄어드는 적분을 다루는 것은 급수의 오차를 제어하는 표준적인 방법이며, 대학 첫 해석학(analysis) 강의에서 만나게 될 것이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이러한 극한을 어떻게 엄밀하게 다루는지 친절하게 보여 주는 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.