풀이

STEP I 2017, 문제 9

역학 • 포물체 운동

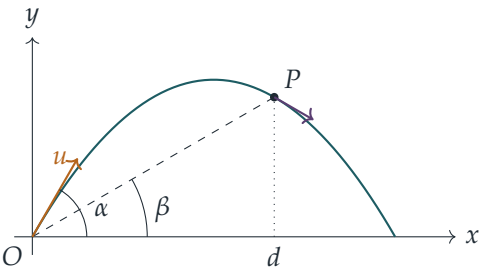
> **STEP I 2017, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q9

핵심 아이디어

궤적 방정식(trajectory equation)을 세우고 그 곡선이 P를 지나도록 한다. 그러면 u^2을 발사각(projection angle)만의 함수로 나타낼 수 있다. 이때 가장 다루기 편한 변수는 $T = \tan\alpha$이다. $\sec^2\alpha = 1 + T^2$ 덕분에 모든 식이 T에 대한 유리함수(rational function)가 되기 때문이다. 이 함수의 최솟값을 구하는 것은 평범한 미분 계산이고, 정류점(stationary point)을 주는 방정식은 알고 보면 모양을 바꾼 배각 공식(double-angle formula)이다.

풀이

입자는 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 운동한다고 모형화한다. O를 원점으로 하고, x축은 P 쪽을 향하는 수평 방향, y축은 연직 위 방향으로 잡는다. $T = \tan\alpha$, $k = \tan\beta > 0$으로 둔다.



소문항 (i)

수평 방향 속도가 $u\cos\alpha$이므로 입자는 시각 $t = x/(u\cos\alpha)$에 수평 거리 x에 도달하고, 그 때의 높이는 다음과 같다.

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} = xT - \frac{gx^2(1+T^2)}{2u^2}.$$

$P = (d,\, dk)$를 지난다는 것은 다음을 뜻한다.

$$dk = dT - \frac{gd^2(1+T^2)}{2u^2} \quad \Longrightarrow \quad u^2 = \frac{gd}{2}\cdot\frac{1+T^2}{T-k}.$$

우변은 양수여야 하므로 $T > k$, 즉 $\alpha > \beta$인 각만 가능하다. 이는 당연하다. P보다 위쪽을 겨냥해야 하기 때문이다. 따라서 다음 함수의 최솟값을 구해야 한다.

$$f(T) = \frac{1+T^2}{T-k} \qquad (T > k).$$

몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$f'(T) = \frac{2T(T-k) - (1+T^2)}{(T-k)^2} = \frac{T^2 - 2kT - 1}{(T-k)^2}.$$

분자는 $T = k \pm \sqrt{k^2+1}$에서 0이 된다. 이 가운데 k보다 큰 것은 $+$ 쪽 근뿐이다. $T \to k^+$일 때와 $T \to \infty$일 때 모두 $f(T) \to \infty$이고 그 사이에 정류점이 하나뿐이므로, 그 점에서 최솟값을 갖는다. 따라서 최적의 α는 다음을 만족한다.

$$T^2 - 2kT - 1 = 0. \qquad (*)$$

> ? **생각해 보기** 무리수 근을 대입하지 않고 최솟점에서 $f(T)$를 어떻게 간단히 할 수 있을까?

$(*)$를 이용해 식을 바꿔 쓴다. $(*)$에서 $k = \dfrac{T^2-1}{2T}$이므로

$$T - k = \frac{2T^2 - T^2 + 1}{2T} = \frac{1+T^2}{2T}, \qquad \text{따라서} \qquad f(T) = \frac{1+T^2}{(1+T^2)/(2T)} = 2T.$$

그러므로

$$u^2 = \frac{gd}{2}\cdot 2T = gd\tan\alpha,$$

이고, 이것이 보이려던 결과이다.

각에 대해서는, $(*)$를 $k = \dfrac{T^2-1}{2T}$ 꼴로 쓰면

$$\tan\beta = -\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = -\cot 2\alpha = \tan(2\alpha - 90^\circ),$$

이다. 여기서 $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$와 $-\cot\theta = \tan(\theta - 90^\circ)$를 이용했다. ($\alpha = 45^\circ$이면 $(*)$에서 $k = 0$이 되는데, $\beta > 0$이므로 이 경우는 제외된다. 따라서 $\cot 2\alpha$는 정의된다.) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$이므로 각 $2\alpha - 90^\circ$는 $(-90^\circ, 90^\circ)$에 속하고, β도 마찬가지이며, 이 구간에서 tan은 일대일(one-to-one)이다. 따라서 $\beta = 2\alpha - 90^\circ$, 즉

$$2\alpha = \beta + 90^\circ.$$

말로 하면, 가장 좋은 발사 방향은 직선 OP와 연직 위 방향 사이의 각을 이등분한다.

소문항 (ii)

P에서도 수평 방향 속도는 여전히 $u\cos\alpha$이다. 걸린 시간은 $d/(u\cos\alpha)$이므로 연직 방향 속도는

$$v_y = u\sin\alpha - \frac{gd}{u\cos\alpha}.$$

P에서 입자가 수평보다 각 θ만큼 위쪽으로 움직인다고 하면

$$\tan\theta = \frac{v_y}{u\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gd}{u^2\cos^2\alpha} = T - \frac{gd(1+T^2)}{gdT} = T - \frac{1+T^2}{T} = -\frac{1}{T} = -\cot\alpha,$$

이다. 여기서 소문항 (i)의 $u^2 = gdT$를 이용했다. 따라서 $\tan\theta = \tan(\alpha - 90^\circ)$이고, θ는 -90°와 90° 사이에 있으므로 $\theta = \alpha - 90^\circ$이다.

입자는 P를 지날 때 **아래쪽으로** 움직이며, 그 방향은 수평보다 $90^\circ - \alpha$만큼 아래이다. P에서의 운동 방향은 발사 방향과 수직이다.

검산

- $\beta = 30^\circ$로 두자. 그러면 $\alpha = 60^\circ$이고 $u^2 = \sqrt{3}\,gd$이다. 직접 계산하면 $T = \sqrt{3}$에서 $f(T)$는 $4/(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 2\sqrt{3}$이고, 이는 $2T$와 일치한다. 마지막 운동 방향은 그림에서처럼 수평보다 30° 아래이다.
- $\beta \to 0$으로 보내면 $\alpha \to 45^\circ$, $u^2 \to gd$이다. 이는 평지에서 최대 도달 거리 u^2/g가 45°로 발사할 때 얻어진다는 익숙한 사실이다. 이때 입자는 수평보다 45° 아래 방향으로 떨어지며, 역시 발사 방향과 수직이다.
- d와 β를 무작위로 200번 골라 α에 대해 수치적으로 탐색한 결과, 최솟값을 주는 각은 매번 $\frac{1}{2}(\beta + 90^\circ)$였고 최솟값은 $gd\tan\alpha$였다.

흔한 실수

- 조건 $T > k$를 빠뜨리고 근 $k - \sqrt{k^2+1}$을 남겨 두는 것. 이 근은 음수이므로 아래쪽으로 발사한다는 뜻이 된다.

- 두 각이 모두 tan이 일대일인 구간에 속하는 이유를 밝히지 않고, 탄젠트 값이 같다는 것만으로 $\beta = 2\alpha - 90^\circ$라고 결론짓는 것.
- (ii)의 각을 $90^\circ - \alpha$로 답하면서 입자가 내려가고 있다는 사실을 말하지 않는 것.

STEP 너머

속력 u가 고정되어 있을 때 도달할 수 있는 점들은 어떤 포물선의 안쪽에 놓인다. 이 포물선이 궤적들의 족이 갖는 **포락선**(envelope), 곧 "안전 포물선(parabola of safety)"이다. P까지 가는 최소 속력 궤적은 P가 그 포락선 위에 놓이는 궤적이며, (ii)의 수직 관계는 이 곡선이 갖는 기하학적 성질 가운데 하나이다. 곡선족의 포락선과 제약 조건이 있는 최적화(optimisation)는 대학 1학년 과정에서 본격적으로 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 문제를 이처럼 꼼꼼하게 다루는 모습을 보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.