풀이

STEP I 2017, 문제 8

순수수학 • 점화식과 수학적 귀납법

> **STEP I 2017, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q8

핵심 아이디어

식 $a_n^2 + 2a_nb_n - b_n^2$의 값은 점화식(recurrence)을 한 번 적용해도 변하지 않으므로, 처음 값을 영원히 유지한다. 이 식을 b_n^2으로 나누면 비 c_n에 대한 정확한 방정식이 되고, 여기에 작은 오차항 $1/b_n^2$이 붙는다. 이 방정식에서 완전제곱식을 만드는 것(completing the square)이 거의 모든 일을 해 준다. 이로부터 극한(limit), 비가 $\sqrt{2}-1$의 어느 쪽에 있는지, 그리고 $\sqrt{2}$에 대한 유리수(rational) 경계를 모두 얻는다.

풀이

귀납법

$n = 1$일 때 $a_1^2 + 2a_1b_1 - b_1^2 = 1 + 4 - 4 = 1$이므로 $(*)$가 성립한다.

어떤 $n \geq 1$에 대하여 $(*)$가 성립한다고 가정하자. $a = a_n$, $b = b_n$으로 쓰면

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= a^2 + 4ab + 4b^2, \\ 2a_{n+1}b_{n+1} &= 2(a+2b)(2a+5b) = 4a^2 + 18ab + 20b^2, \\ b_{n+1}^2 &= 4a^2 + 20ab + 25b^2. \end{aligned}$$

처음 두 식을 더하고 세 번째 식을 빼면

$$a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}b_{n+1} - b_{n+1}^2 = a^2 + 2ab - b^2 = 1.$$

따라서 $(*)$는 $n+1$일 때도 성립하고, 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립한다.

소문항 (i)

먼저 모든 a_n과 b_n은 양수이다. $n = 1$일 때 참이고, 점화식은 a_n과 b_n으로부터 양의 계수(coefficient)로 a_{n+1}과 b_{n+1}을 만들기 때문이다. 따라서 $a_n > 0$이므로

$$b_{n+1} = 2a_n + 5b_n > 5b_n,$$

이다. $b_1 = 2 = 2 \times 5^0$에서 시작하여 각 단계마다 적어도 5를 곱하므로, 모든 $n \geq 1$에 대하여 $b_n \geq 2 \times 5^{n-1}$이다(한 줄짜리 귀납법).

이제 $(*)$를 0이 아닌 b_n^2으로 나누면

$$c_n^2 + 2c_n - 1 = \frac{1}{b_n^2}, \qquad \text{즉} \qquad (c_n+1)^2 = 2 + \frac{1}{b_n^2}. \tag{†}$$

? 생각해 보기 어느 제곱근을 택해야 할까?

$c_n > 0$이므로 수 $c_n + 1$은 양수이고, 따라서 양의 제곱근을 택한다.

$$c_n + 1 = \sqrt{2 + \frac{1}{b_n^2}}.$$

$n \to \infty$일 때 $0 < 1/b_n^2 \leq \frac{1}{4}25^{-(n-1)} \to 0$이므로 $c_n + 1 \to \sqrt{2}$이다(제곱근 함수는 연속(continuous)이다). 그러므로 요구한 대로 $c_n \to \sqrt{2} - 1$이다.

소문항 (ii)

(†)로부터 $(c_n+1)^2 = 2 + 1/b_n^2 > 2$이다. $c_n + 1 > 0$이고 $\sqrt{2} > 0$이므로 $c_n + 1 > \sqrt{2}$, 즉 $c_n > \sqrt{2} - 1$이다.

다른 쪽 경계를 얻으려면 2를 $c_n + 1 > \sqrt{2}$의 양변으로 나눈다. 양변이 모두 양수이므로 부등호의 방향이 바뀐다.

$$\frac{2}{c_n+1} < \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

둘을 합치면

$$\frac{2}{c_n+1} < \sqrt{2} < c_n + 1.$$

? 생각해 보기 어떤 n의 값이 $99/70$을 만들어 낼까?

$c_n + 1 = (a_n + b_n)/b_n$이 $99/70$이 되어야 하므로 $b_n = 70$인 경우를 찾는다. 점화식을 계산해 나가면

$$(a_1, b_1) = (1, 2), \quad (a_2, b_2) = (5, 12), \quad (a_3, b_3) = (29, 70).$$

따라서 $c_3 = \frac{29}{70}$이고 $c_3 + 1 = \frac{99}{70}$이며,

$$\frac{2}{c_3+1} = \frac{140}{99}.$$

이중 부등식(double inequality)에 $n = 3$을 대입하면

$$\frac{140}{99} < \sqrt{2} < \frac{99}{70}.$$

검산

- $(a_3, b_3) = (29, 70)$은 $(*)$를 만족한다: $841 + 4060 - 4900 = 1$.
- $\frac{140}{99} \approx 1.414141$이고 $\frac{99}{70} \approx 1.414286$이며, $\sqrt{2} \approx 1.414214$는 그 사이에 있다. 이 구간의 폭은 $\frac{1}{6930}$이다.
- 다음 항 $(a_4, b_4) = (169, 408)$은 $c_4 \approx 0.4142157$을 주는데, 이는 이미 $\sqrt{2} - 1$과의 차이가 2.2×10^{-6} 이내이며, 오차가 대략 $1/b_n^2$처럼 줄어든다는 사실과 맞아떨어진다.
- 제곱해 보면: $140^2 = 19600 < 2 \times 99^2 = 19602$이고 $99^2 = 9801 > 2 \times 70^2 = 9800$이다.

흔한 실수

- $n + 1$에 대한 $(*)$를 전개하면서 항을 꼼꼼히 모으지 않는 것: ab와 b^2의 계수는 아슬아슬하게 정리된다($4 + 18 - 20 = 2$, $4 + 20 - 25 = -1$).
- $a_n > 0$임을 밝히지 않고 $b_{n+1} \geq 5b_n$이라고 주장하는 것.
- 양의 제곱근을 택하는 근거를 대지 않거나, 역수(reciprocal)를 취할 때 양변이 양수라는 말 없이 부등호의 방향을 바꾸는 것.

STEP 너머

이 점화식은 행렬(matrix) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$를 곱하는 것인데, 이 행렬은 행렬식(determinant)이 1이고 이차형식(quadratic form) $x^2 + 2xy - y^2$을 보존한다. 이와 같은 불변(invariant) 형식을 찾는 것이 펠 방정식(Pell's equation) 이론의 핵심이다. 수 $c_n + 1$, 즉 $\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70}, \ldots$은 $\sqrt{2}$의 연분수(continued fraction) 수렴분수(convergent)를 하나 걸러 하나씩 뽑은 것이다. 수렴분수는 분모(denominator)의 크기에 비해 가장 좋은 유리수 근사이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 연분수와 펠 방정식을 아름답게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.