풀이

STEP I 2017, 문제 7

순수수학 • 나폴레옹 정리

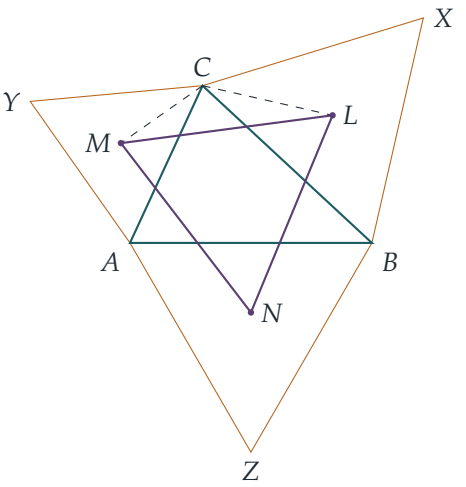
STEP I 2017, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s1-q7

핵심 아이디어

모든 일은 ABC의 꼭짓점(vertex)에서 일어난다. 정삼각형(equilateral triangle)의 중심(centre)은 각 내각의 이등분선(angle bisector) 위에 있으므로, C에서 L로, 그리고 M으로 그은 선분은 각각 ABC의 한 변과 $30°$를 이룬다. 이로부터 각 LCM을 C로 나타낼 수 있다. 그다음 삼각형 LCM에 코사인 법칙(cosine rule)을 적용하면 $|LM|$을 얻는다. 그 결과는 a, b, c에 대하여 대칭(symmetric)이며, 바로 이 대칭성 때문에 LMN이 정삼각형이 된다.



풀이

소문항 (i)

한 변의 길이가 b인 정삼각형 CYA에서 중심 M은 세 중선(median) 위에 모두 있으며, 이 중선들은 동시에 높이(altitude)이자 각의 이등분선이다. C에서 그은 중선의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$이고, 중심은 이 중선 위에서 꼭짓점으로부터 전체 길이의 3분의 2만큼 떨어진 곳에 있다. 따라서

$$|CM| = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}\, b = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

같은 방법으로, 삼각형 BXC의 한 변의 길이는 a이므로

$$|CL| = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

소문항 (ii)

CM은 60°인 각 YCA를 이등분하므로, 직선 CM은 B의 반대쪽에서 CA와 30°를 이룬다. 마찬가지로 CL은 A의 반대쪽에서 CB와 30°를 이룬다. C를 중심으로 L에서 M까지 돌아가면 30°, 삼각형의 각 C, 그리고 다시 30°를 차례로 지난다. 따라서

$$\angle LCM = C + 60^\circ.$$

? **생각해 보기** $C > 120^\circ$이어서 $C + 60^\circ$가 180°보다 크면 어떻게 될까?

그때는 삼각형 LCM의 C에서의 내각이 반대쪽 각, 즉 $360^\circ - (C + 60^\circ)$가 된다. 그러나 $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$이므로, 아래의 코사인 법칙은 모든 경우에 같은 결과를 준다.

소문항 (i)에서 구한 길이를 써서 삼각형 LCM에 코사인 법칙을 적용하면

$$\begin{aligned} |LM|^2 &= \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\cos(C + 60^\circ) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\left(\tfrac{1}{2}\cos C - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{3} - \frac{ab\cos C}{3} + \frac{\sqrt{3}\,ab\sin C}{3}. \end{aligned}$$

이제 삼각형 ABC에 대한 두 가지 사실을 이용한다. 코사인 법칙에 의해 $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$이고, 넓이(area)는 $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$이므로 $ab\sin C = 2\Delta$이다. 양변에 6을 곱하면

$$\begin{aligned} 6|LM|^2 &= 2(a^2 + b^2) - 2ab\cos C + 2\sqrt{3}\,ab\sin C \\ &= 2a^2 + 2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2) + 4\sqrt{3}\,\Delta \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\,\Delta, \end{aligned}$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

우변은 a, b, c의 순서를 바꾸어도 변하지 않고, Δ는 삼각형의 꼭짓점에 이름을 붙이는 방식과 무관하다. 같은 논증을 꼭짓점 A에서($|MN|$에 대하여), 그리고 꼭짓점 B에서($|NL|$에 대하여) 되풀이하면 같은 식을 얻는다. 따라서

$$|LM| = |MN| = |NL|,$$

이고 LMN은 정삼각형이다.

넓이가 같을 조건. 한 변의 길이가 s인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$이다. $S = a^2 + b^2 + c^2$이라 하자. 그러면

$$[LMN] = \frac{\sqrt{3}}{4}|LM|^2 = \frac{\sqrt{3}}{24}(S + 4\sqrt{3}\,\Delta) = \frac{\sqrt{3}}{24}S + \frac{\Delta}{2}.$$

그러므로

$$[LMN] = \Delta \iff \frac{\sqrt{3}}{24}S = \frac{\Delta}{2} \iff S = \frac{12\Delta}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\,\Delta.$$

모든 단계를 거꾸로 거슬러 갈 수 있으므로, 이것이 바로 요구한 "필요충분조건(if and only if)"이다.

소문항 (iii)

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$와 $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$를 이용하여 모든 것을 a, b, C로 나타낸다. 아래의 각 줄은 바로 앞 줄과 동치이다.

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\,\Delta \\ \iff \quad & 2a^2 + 2b^2 - 2ab\cos C = 2\sqrt{3}\,ab\sin C \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = ab(\cos C + \sqrt{3}\sin C) \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = 2ab\cos(C - 60^\circ), \end{aligned}$$

여기서 $\cos C + \sqrt{3}\sin C = 2(\cos C\cos 60^\circ + \sin C\sin 60^\circ) = 2\cos(C - 60^\circ)$임을 이용하였다. 양변에서 $2ab$를 빼면

$$a^2 - 2ab + b^2 = 2ab\cos(C - 60^\circ) - 2ab \iff (a-b)^2 = -2ab(1 - \cos(C - 60^\circ)).$$

따라서 두 조건은 동치이다.

? **생각해 보기** 제곱인 값이 앞에 음의 부호가 붙은 값과 어떻게 같을 수 있을까?

양변이 모두 0일 때뿐이다. 좌변 $(a-b)^2$은 0 이상이다. 우변에서는 $ab > 0$이고 $1 - \cos(C - 60^\circ) \geq 0$이므로 우변은 0 이하이다. 따라서 등식은 정확히 다음 경우에 성립한다.

$$a = b \quad \text{이고} \quad \cos(C - 60^\circ) = 1.$$

$0^\circ < C < 180^\circ$이므로 $-60^\circ < C - 60^\circ < 120^\circ$이고, 이 범위에서 코사인 값이 1인 각은 0°뿐이다. 따라서 $C = 60^\circ$이다. $a = b$이고 꼭지각이 60°인 삼각형은 나머지 두 각이 서로 같고 그 합이 120°이므로, 세 각이 모두 60°가 되어 정삼각형이다. 역으로, 정삼각형은 $a = b$이고 $C = 60^\circ$이므로 이 조건을 만족한다.

이것을 소문항 (ii)와 합치면 $[LMN] = [ABC] \iff a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\,\Delta \iff ABC$는 정삼각형이다.

검산

- 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC: 이때 $\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}$이고 $6|LM|^2 = 3 + 3 = 6$이므로 $|LM| = 1$이며, 소문항 (iii)이 예측하는 대로 두 넓이가 같다.
- 세 변이 3–4–5인 직각삼각형: $S = 50$이고 $\Delta = 6$이므로 $|LM|^2 = (50 + 24\sqrt{3})/6 \approx 15.26$이다. 그러면 $[LMN] \approx 6.61$이고, 이는 $[ABC] = 6$보다 크다. 점 L, M, N의 좌표를 써서 컴퓨터로 확인한 결과도 같은 값을 주었으며, 둔각삼각형을 포함한 수천 개의 무작위 삼각형에서 $6|LM|^2$에 대한 공식이 성립함을 확인하였다.
- 소문항 (iii)은 또한 모든 삼각형에 대하여 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,\Delta$임을 보여 주므로, 언제나 $[LMN] \geq [ABC]$이다.

흔한 실수

- $|CM|$을 3분의 2가 아니라 중선 전체 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$나 그 3분의 1로 잡는 것.
- 양쪽의 30°를 잊고 $\angle LCM = C + 30^\circ$ 또는 C로 쓰는 것.
- 소문항 (iii)에서 "$a = b$"에서 멈추는 것. $C = 60^\circ$도 필요하며, 코사인 값이 1인 다른 각을 배제하려면 C의 범위도 따져야 한다.

STEP 너머

이것은 나폴레옹 정리(Napoleon's theorem)이다. 임의의 삼각형의 각 변 위에 바깥쪽으로 정삼각형을 세우면, 그 정삼각형들의 중심은 정삼각형을 이룬다. 소문항 (iii)에서 얻은 부등식 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,\Delta$는 Weitzenböck 부등식(Weitzenböck's inequality)이다. 복소수(complex numbers)를 쓰면 나폴레옹 정리를 아주 깔끔하게 증명할 수 있다. 60°만큼 회전하는 것은 $e^{i\pi/3}$을 곱하는 것과 같기 때문이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이런 방식으로 기하학을 다루는 법을 아름답게 펼쳐 보인다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.