풀이

STEP I 2017, 문제 6

순수수학 • 적분과 부호 변화

> **STEP I 2017, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q6

핵심 아이디어

부호가 한 번도 바뀌지 않으면서 항등적으로 0이 아닌 연속함수(continuous function)의 적분(integral)은 0이 아니다. 이 함수는 어떤 작은 구간에서 0으로부터 떨어져 있고, 그 구간 하나만으로도 적분값에 무언가를 보태기 때문이다. 소문항 (i)은 이 사실을 엄밀하게 만들고, 소문항 (ii)와 (iii)은 이를 교묘하게 고른 함수에 적용한다. (ii)에서는 피적분함수(integrand) $(x-\alpha)^2 g(x)$가 g와 같은 부호를 가진다. (iii)에서는 부분적분(integration by parts)을 통해 h에 관한 정보가 h'에 대한 (ii)의 조건으로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

귀류법(proof by contradiction)으로, f가 $[0,1]$에서 양의 값과 음의 값을 모두 갖지는 **않는다**고 가정하자. 그러면 $[0,1]$의 모든 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이거나, 그러한 모든 x에 대하여 $f(x) \leq 0$이다. 필요하면 f를 $-f$로 바꾸어(이렇게 해도 가정 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$과 결론은 모두 바뀌지 않는다) 구간 전체에서 $f(x) \geq 0$이라고 가정해도 된다.

어떤 $c \in [0,1]$에 대하여 $f(c) \neq 0$이라고 주어졌으므로 $f(c) > 0$이다. f가 c에서 연속이므로, $|x-c| < \delta$인 $[0,1]$의 모든 x에 대하여 $f(x) > \frac{1}{2} f(c)$가 되는 $\delta > 0$이 존재한다. 이 집합은 길이 $q-p$가 양수인 구간 $[p,q] \subseteq [0,1]$을 포함한다($0 < \eta < \delta$이고 $\eta \leq \frac{1}{2}$인 η를 잡아, $c \leq \frac{1}{2}$이면 $[c,\, c+\eta]$를, $c > \frac{1}{2}$이면 $[c-\eta,\, c]$를 택하면 된다). 모든 곳에서 $f \geq 0$이므로

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \tfrac{1}{2} f(c)\,(q-p) \;>\; 0,$$

이고, 이는 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$에 모순이다. 따라서 f는 $[0,1]$에서 양의 값과 음의 값을 모두 갖

는다.

> **생각해 보기** "$f \geq 0$이고 $f(c) > 0$이므로 적분은 양수이다"만으로는 왜 충분하지 않은가?

함수는 한 점에서 양수이더라도 적분값에는 아무 영향이 없을 수 있다. 한 점에는 폭이 없기 때문이다. c에서의 양수성을 길이가 양수인 구간으로 퍼뜨려 주는 것이 바로 연속성이고, 이것이 적분값을 양수로 만든다.

소문항 (ii)

제곱을 전개하고 세 조건 $(*)$를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-\alpha)^2 g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2 g(x)\,\mathrm{d}x - 2\alpha\int_0^1 x g(x)\,\mathrm{d}x + \alpha^2\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha^2 - 2\alpha\cdot\alpha + \alpha^2\cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

이제 귀류법으로, 모든 $x \in [0,1]$에 대하여 $g(x) \neq 0$이라고 가정하자. 그러면 g는 $[0,1]$에서 두 부호를 모두 가질 수 없다(그렇다면 문제 첫머리의 가정에 의해 어딘가에서 0이 되기 때문이다). 따라서 g는 구간 전체에서 순양수이거나 구간 전체에서 순음수이다.

$f(x) = (x-\alpha)^2 g(x)$라 하면 f는 연속이다. $(x-\alpha)^2 \geq 0$이므로 f는 0이 아닌 곳에서 g와 같은 부호를 가지며, 따라서 f는 두 부호를 모두 갖지 않는다. 그런데 f는 $[0,1]$의 어딘가에서 0이 아니다. $(x-\alpha)^2$은 $x=\alpha$에서만 0이 되므로, (α일 수도 있는 점을 제외한) 모든 $x \in [0,1]$에 대하여 $f(x) \neq 0$이다. 또한 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$이다. 소문항 (i)에 의해 f는 두 부호를 모두 가져야 하므로 모순이다. 따라서 $[0,1]$의 어떤 x에 대하여 $g(x) = 0$이다.

일차함수의 예. $g(x) = a + bx$일 때 조건 $(*)$는 다음과 같다.

$$a + \tfrac{1}{2}b = 1, \qquad \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{3}b = \alpha, \qquad \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{4}b = \alpha^2.$$

첫째 식에서 $a = 1 - \frac{1}{2}b$이고, 이를 둘째 식에 대입하면 $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}b = \alpha$이므로

$$b = 12\alpha - 6, \qquad a = 4 - 6\alpha.$$

그러면 셋째 조건은

$$\tfrac{1}{3}(4-6\alpha) + \tfrac{1}{4}(12\alpha - 6) = \alpha - \tfrac{1}{6} = \alpha^2,$$

즉 $6\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0$이 되므로

$$\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

α가 자유롭지 않다는 점에 주목하자. 일차함수 g는 이 두 값에 대해서만 가능하다. $\alpha = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$으로 택하면 $b = 2\sqrt{3}$, $a = 1 - \sqrt{3}$이므로

$$g(x) = 1 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,x,$$

이고, 이 함수는

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.211,$$

에서 0이 되며, 소문항 (ii)가 말하는 대로 이 값은 $[0,1]$에 속한다. (다른 선택인 $\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$은 $g(x) = 1+\sqrt{3}-2\sqrt{3}\,x$를 주고, 이 함수는 $x = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.789$에서 0이 되는데, 이 값 역시 $[0,1]$에 속한다.)

소문항 (iii)

$g = h'$이 $\alpha = 1-\beta$로 $(*)$를 만족함을 보이자. 여기서 h'은 소문항 (ii)가 요구하는 대로 연속이다. 먼저

$$\int_0^1 h'(x)\,\mathrm{d}x = h(1) - h(0) = 1.$$

$u = x$, $\mathrm{d}v = h'(x)\,\mathrm{d}x$로 부분적분하면

$$\int_0^1 xh'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[xh(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = 1-\beta.$$

이번에는 $u = x^2$으로 다시 부분적분하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2h'(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[x^2h(x)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 xh(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 1-\beta(2-\beta) = 1-2\beta+\beta^2 = (1-\beta)^2.\end{aligned}$$

> **생각해 보기** 이상한 값 $\frac{1}{2}\beta(2-\beta)$는 어디에서 나온 것인가?

이 값은 셋째 적분이 둘째 적분의 제곱이 되도록 정확히 맞추어 고른 것이다. 두 번의 부분적분을 거치면 둘째 적분은 $1-\beta$이므로 셋째 적분은 $(1-\beta)^2$이어야 하고, $\frac{1}{2}\beta(2-\beta)$가 바로 그 값을 만들어 준다.

따라서 h'은 연속이고 $\alpha = 1-\beta$로 $(*)$를 만족한다. 소문항 (ii)에 의해 $[0,1]$의 어떤 x에 대하여 $h'(x) = 0$이다.

검산

- $g(x) = 1-\sqrt{3}+2\sqrt{3}\,x$에 대하여 직접 적분하면 $\int_0^1 g = 1$, $\int_0^1 xg = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.7887$, $\int_0^1 x^2 g \approx 0.6220 = (0.7887)^2$이다.
- 소문항 (iii)은 도함수(derivative)가 위의 g인 $h(x) = (1-\sqrt{3})x + \sqrt{3}\,x^2$으로 확인할 수 있다. 이때 $h(0) = 0, h(1) = 1, \beta = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.2113$이고 $\int_0^1 xh = \frac{1}{2}\beta(2-\beta) \approx 0.1890$이다. 도함수는 $x \approx 0.211$에서 0이 되므로, 예측한 대로 h는 $[0,1]$ 안에 극점(turning point)을 갖는다.

흔한 실수

- (i)에서 연속성을 쓰지 않고 "$f \geq 0$이므로 $\int f > 0$"이라고 논증하는 것. 음이 아닌 함수는 모든 곳에서 0이 아니더라도(단 한 점에서만 0이 아닌 경우) 적분값이 0일 수 있으므로, 연속성은 꼭 필요하다.
- (ii)에서 (i)을 g 자체에 적용하는 것. $\int g$에 대해서는 그 값이 1이라는 것 외에는 아는 것이 없다. 소문항 (i)은 $(x-\alpha)^2 g$에 적용해야 하며, 이 함수가 어딘가에서 0이 아님을 확인해야 한다.
- (iii)에서 (ii)를 적용하려면 h'이 연속이어야 한다는 것을 잊는 것. 문제에서 h가 **연속인** 도함수를 갖는다고 말한 이유가 바로 이것이다.

STEP 너머

조건 $(*)$는 g가 확률밀도함수(probability density)라면 그 평균(mean)이 α이고 분산(variance)이 $\int (x-\alpha)^2 g = 0$이라는 뜻이다. 분산이 0인 진짜 확률밀도함수는 불가능하며, 그래서 g는 어딘가에서 0 아래로 내려가야 한다. 소문항 (i)은 실해석학(real analysis)의 표준적인 보조정리(lemma)이다. 즉, 음이 아니고 적분값이 0인 연속함수는 항등적으로 0이다. 이 보조정리는 변분법(calculus of variations) 등에서 끊임없이 쓰인다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 연속성과 리만 적분(Riemann integral)을 이 보조정리와, 이 문제에서 가정해도 된다고 한 중간값 정리(intermediate value theorem)를 증명할 수 있을 만큼 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.