풀이

STEP I 2017, 문제 5

순수수학 • 미분을 이용한 최적화

STEP I 2017, 5번 문제

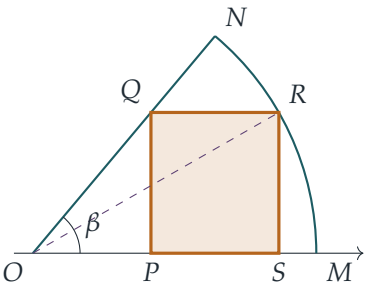
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s1-q5

핵심 아이디어

꼭짓점의 위치를 정하고 나면 모든 것이 변수 x 하나로 결정된다. Q는 직선 $y = x\tan\beta$ 위에서 P의 바로 위에 있고, R은 원 위에서 Q와 같은 높이에 있다. 피타고라스 정리(Pythagoras' theorem)로 s를 x로 나타내면, 넓이는 미분하기만 하면 되는 평범한 일변수 함수가 된다. 마지막의 각에 대한 조건은 tan의 반각 공식(half-angle formula)에서 바로 나온다.

풀이



넓이

$PQRS$는 P와 S가 x축 위에 있는 직사각형이므로 변 PQ와 SR은 수직이다. 따라서 Q의 x좌표는 x이다. 이 점은 직선 $y = x\tan\beta$인 ON 위에 있으므로 $Q = (x, x\tan\beta)$이고, $R = (s, x\tan\beta)$이다. 직사각형의 가로 길이는 $PS = s - x$이고(S가 P보다 O에서 더 멀리 있으므로 양수이다) 세로 길이는 $PQ = x\tan\beta$이므로

$$A = x(s - x)\tan\beta,$$

이고, 이것이 구하는 식이다.

s와 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}$ 구하기

R이 원 위에 있으므로 $OR = a$이고, 따라서 $s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$이다. $s > 0$이므로

$$s = \sqrt{a^2 - x^2\tan^2\beta}.$$

$s^2 = a^2 - x^2\tan^2\beta$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $2s\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -2x\tan^2\beta$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x\tan^2\beta}{s}$이다. 이제 $A = (xs - x^2)\tan\beta$로 쓰고 xs에 곱의 미분법(product rule)을 적용하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= \left(s + x\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} - 2x\right)\tan\beta \\ &= (s - 2x)\tan\beta - \frac{x^2}{s}\tan^3\beta,\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

최대 넓이

먼저 x의 범위를 살펴보자. x가 0에서부터 커지면 Q는 ON을 따라 올라가고 R은 호를 따라 N 쪽으로 움직인다. R이 N에 닿을 때, 즉 $x = a\cos\beta$일 때 직사각형은 수직인 선분으로 줄어든다(이때 $s = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\beta} = a\cos\beta = x$이다). 따라서 $0 < x < a\cos\beta$이고, A는 $[0, a\cos\beta]$에서 연속인 함수(continuous function)로서 양 끝에서 $A = 0$이고 그 사이에서 $A > 0$이다. 그러므로 최댓값은 구간 내부의 정류점(stationary point)에서 나타난다.

$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$으로 놓고 양변을 $\tan\beta > 0$으로 나눈 뒤 $s > 0$을 곱하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}s^2 - 2xs &= x^2\tan^2\beta \\ s^2 - 2xs + x^2 &= x^2(1 + \tan^2\beta) = x^2\sec^2\beta \\ (s - x)^2 &= x^2\sec^2\beta.\end{aligned}$$

> ? **생각해 보기** 어느 제곱근을 택해야 하며, 이것이 최댓값임을 어떻게 알 수 있을까?

$s - x$와 $x\sec\beta$는 모두 양수이므로($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$이기 때문이다) $s - x = x\sec\beta$이다. 다른 근을 택하면 $s - x$가 음수가 된다. 따라서 $0 < x < a\cos\beta$에서 정류점은 정확히 하나뿐이며, 그 점은

$$s = x(1 + \sec\beta),$$

로 주어진다. 앞 문단의 논의에 따라 이 점에서 넓이가 최대가 되어야 한다.

이 넓이를 구하기 위해 $s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$에 대입한다. $\tan^2\beta = \sec^2\beta - 1$을 이용하면

$$(1+\sec\beta)^2 + \tan^2\beta = 2\sec\beta + 2\sec^2\beta = 2\sec\beta\,(1+\sec\beta),$$

이므로

$$x^2 = \frac{a^2}{2\sec\beta\,(1+\sec\beta)} = \frac{a^2\cos^2\beta}{2(1+\cos\beta)}.$$

이 점에서 $s - x = x\sec\beta$이므로

$$A = x\cdot x\sec\beta\cdot\tan\beta = x^2\,\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta} = \frac{a^2\sin\beta}{2(1+\cos\beta)}$$
$$= \frac{a^2\cdot 2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\cdot 2\cos^2\frac{1}{2}\beta} = \tfrac{1}{2}a^2\tan\tfrac{1}{2}\beta,$$

이다. 여기서 $\sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$와 $1+\cos\beta = 2\cos^2\frac{1}{2}\beta$를 이용하였다.

각 ROS

직각삼각형 ORS에서 $\tan\angle ROS = \dfrac{SR}{OS} = \dfrac{x\tan\beta}{s}$이다. 최대일 때는 앞에서와 같은 두 반각 항등식에 의해

$$\tan\angle ROS = \frac{\tan\beta}{1+\sec\beta} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta+1} = \tan\tfrac{1}{2}\beta,$$

이다. $\angle ROS$와 $\frac{1}{2}\beta$는 모두 tan가 일대일(one-to-one)인 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하므로 $\angle ROS = \frac{1}{2}\beta$이다. 즉 최적의 직사각형에서 OR은 부채꼴(sector)을 이등분한다.

검산

- $a = 1$, $\beta = \frac{\pi}{3}$로 놓자. 그러면 $x^2 = \frac{1/4}{3} = \frac{1}{12}$, $s = 3x$이고 $A = x\cdot 2x\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0.2887$인데, 이는 $\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{6}$와 같다. 무작위로 고른 여러 a와 β에 대해 x의 촘촘한 격자 위에서 컴퓨터로 탐색한 결과, 같은 최댓값과 같은 최적의 x를 얻었다.
- $\beta \to 0$이면 부채꼴이 납작하게 사라지고, 마땅히 그래야 하듯 $\frac{1}{2}a^2\tan\frac{1}{2}\beta \to 0$이다.
- 단위: A는 a^2에 순수한 수를 곱한 것이므로 넓이가 맞다.

흔한 실수

- s가 x에 따라 변한다는 사실을 잊고, s가 상수인 것처럼 $x(s-x)\tan\beta$를 미분하는 실수.
- $s - x = -x\sec\beta$까지 함께 택하거나, 정류점이 최댓값을 준다는 것을 정당화하지 않는 실수.

STEP 너머

OR이 부채꼴의 이등분선을 따라 놓인다는 깔끔한 답에는 멋진 설명이 있다. $R = (a\cos\theta, a\sin\theta)$라 하면 간단한 계산으로 $A = \frac{1}{2}a^2\big(\cos(2\theta - \beta) - \cos\beta\big) / \sin\beta$를 얻는데, 이는 $\theta = \frac{1}{2}\beta$일 때 최대임이 분명하다. 변수를 잘 고르면 최적화(optimisation) 문제가 거의 자명해질 수 있다. 대학에서는 여러 변수의 제약 최적화(constrained optimisation)를 배우는데, 그때는 s를 소거하는 대신 라그랑주(Lagrange) 승수법(Lagrange multipliers)을 써서 $s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$이라는 조건 아래에서 $x(s - x)$를 최대화할 수 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 정신의 문제가 훨씬 더 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.