풀이

STEP I 2017, 문제 4

순수수학 • 이차식과 등비급수

> **STEP I 2017, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q4

핵심 아이디어

모든 것은 열린구간(open interval) $(-1,1)$ 안에서 몇 개의 r 값이 주어진 p(또는 q) 값을 만드는지에 달려 있다. 이것은 $-1 < r < 1$로 제한된 포물선(parabola)에 관한 질문이다. 수평선은 이 포물선과 한 번 또는 두 번 만나거나 전혀 만나지 않으며, 어느 경우인지는 그래프를 그려 보면 알 수 있다. r를 알면 합이 정해지고, 합은 r의 일대일(one-to-one) 함수이므로 서로 다른 두 r 값은 언제나 서로 다른 두 합을 준다. 합들이 만족하는 방정식을 구하려면 r를 합으로 나타낸 뒤 대입하면 된다.

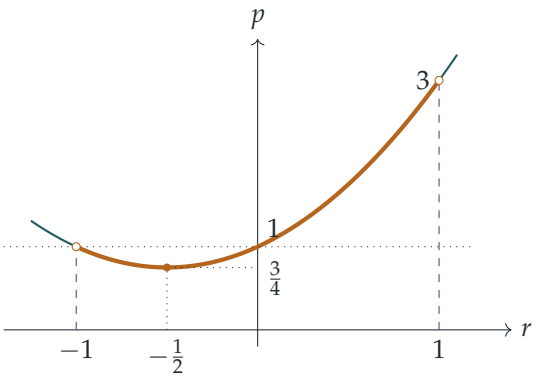
풀이

소문항 (i)

완전제곱식(completing the square)으로 고치면

$$1 + r + r^2 = \left(r + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4},$$

이므로 그래프는 최솟점이 $\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right)$인 포물선이다. 이 포물선은 $(-1,1)$, $(0,1)$, $(1,3)$을 지난다.



$-1 < r < 1$(굵은 호)에서 이 함수는 1에서부터($r = -1$이 제외되므로 이 값은 취하지 않는다) 감소하여 $r = -\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{3}{4}$에 이르고, 그 뒤 3을 향해 증가한다($r = 1$이 제외되므로 이 값도 취하지 않는다). 따라서

$$\tfrac{3}{4} \le p < 3.$$

$1 < p < 3$일 때. 이 p를 주는 r 값들은

$$r^2 + r + (1 - p) = 0.$$

의 근(root)이다. 두 근의 곱이 $1 - p < 0$이므로 양의 근 하나와 음의 근 하나가 있다. 두 근의 합이 -1이므로 음의 근은 -1에서 양의 근을 뺀 값이고, 이는 -1보다 작으므로 허용되지 않는다. 양의 근은

$$r = \frac{-1 + \sqrt{4p - 3}}{2},$$

이고, $1 < 4p - 3 < 9$이므로 $0 < r < 1$이 되어 허용된다. (그래프에서 보면, 높이 $p \in (1, 3)$인 수평선은 굵은 호의 증가하는 부분 $0 < r < 1$에서만 만난다.) 따라서 p가 r를 유일하게 결정하고, 그러므로 $S = 1/(1 - r)$도 유일하게 결정된다.

$\frac{3}{4} < p < 1$일 때. 이제 판별식(discriminant) $1 - 4(1 - p) = 4p - 3$이 양수이므로 이차방정식(quadratic)은 서로 다른 두 실근을 가진다. 두 근의 곱 $1 - p$는 양수이고 합은 -1이므로 두 근은 모두 음수이다. 각 근은 -1에서 다른 근을 뺀 값이고 다른 근이 음수이므로, 각 근은 -1보다 크다. 따라서 두 근은 모두 $(-1, 0)$에 있고 둘 다 허용된다.

> ? **생각해 보기** r 값이 두 개인 것은 좋다. 그런데 왜 이들이 **서로 다른** S 값을 주어야 하는가?

$S = \dfrac{1}{1 - r}$는 역으로 풀 수 있기 때문이다: $r = 1 - \dfrac{1}{S}$. 따라서 서로 다른 r 값은 서로 다른 S 값을 주므로, 가능한 S 값은 정확히 두 개이다.

이들이 만족하는 방정식을 구하기 위해 $u = 1/S$로 두고 $r = 1 - u$를 $r^2 + r + 1 - p = 0$에 대입하면

$$(1-u)^2 + (1-u) + 1 - p = 0$$
$$u^2 - 3u + (3-p) = 0.$$

$u = 1/S$를 넣고 (0이 아닌) S^2을 곱하면

$$(3-p)S^2 - 3S + 1 = 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 두 S 값은 모두 허용되는 근 r에서 나온 것이므로 둘 다 이 방정식을 만족한다.

소문항 (ii)

다시 완전제곱식으로 고치면

$$q = 1 + 2r + 3r^2 = 3\left(r + \tfrac{1}{3}\right)^2 + \tfrac{2}{3}.$$

최솟값은 $r = -\frac{1}{3}$에서 $\frac{2}{3}$이고, $r = -1$에서의 값은 2, $r = 1$에서의 값은 6이다. 따라서 $-1 < r < 1$에서

- 감소하는 부분 $-1 < r \le -\frac{1}{3}$에서 q는 $\left[\frac{2}{3}, 2\right)$의 각 값을 정확히 한 번씩 취한다.
- 증가하는 부분 $-\frac{1}{3} \le r < 1$에서 q는 $\left[\frac{2}{3}, 6\right)$의 각 값을 정확히 한 번씩 취한다.

두 부분은 점 $r = -\frac{1}{3}$만 공유한다. 따라서 q의 값은

- $q = \frac{2}{3}$일 때(즉 $r = -\frac{1}{3}$) 또는 $2 \le q < 6$일 때(증가하는 부분에서만) 정확히 하나의 r에서 나온다.
- $\frac{2}{3} < q < 2$일 때 정확히 두 개의 r 값에서 나온다(각 부분에서 하나씩).
- 그 밖의 경우에는 어떤 r에서도 나오지 않는다.

예를 들어 $q = 2$일 때 방정식 $3r^2 + 2r - 1 = 0$은 $(3r-1)(r+1) = 0$으로 인수분해되고, 근 $r = -1$은 제외되므로 $r = \frac{1}{3}$만 남는다.

앞에서와 마찬가지로 T는 r를 결정한다. $1 - r > 0$이므로 $1 - r = 1/\sqrt{T}$이다. 따라서 서로 다른 r는 서로 다른 T를 준다. 그러므로

$$T\text{는 다음 경우에 유일하게 결정된다: } q = \tfrac{2}{3} \text{ 또는} 2 \le q < 6,$$

이고

$$T\text{의 가능한 값이 두 개인 경우: } \tfrac{2}{3} < q < 2.$$

이차방정식. $u = 1 - r = 1/\sqrt{T} > 0$으로 두고 $r = 1 - u$라 쓰자. 그러면

$$q = 1 + 2(1-u) + 3(1-u)^2 = 3u^2 - 8u + 6.$$

$u^2 = 1/T$이므로 이 식은 $\dfrac{3}{T} + 6 - q = \dfrac{8}{\sqrt{T}}$가 된다. 양변에 T를 곱하면

$$(6-q)T + 3 = 8\sqrt{T}.$$

이것은 이미 $\sqrt{T}$에 관한 이차방정식이다. T 자체에 관한 이차방정식을 얻으려면 양변을 제곱한다.

$$(6-q)^2T^2 + 6(6-q)T + 9 = 64T,$$

즉

$$(6-q)^2\,T^2 - 2(3q+14)\,T + 9 = 0.$$

가능한 두 T 값은 모두 이 방정식을 만족한다. 여기서는 제곱 때문에 엉뚱한 근이 끼어들 수 없다. $q < 6$이고 $T > 0$이면 좌변 $(6-q)T + 3$은 양수이므로, 다른 경우인 $(6-q)T + 3 = -8\sqrt{T}$는 $T > 0$인 해를 갖지 않는다. 또한 T에 관한 이차방정식은 두 근의 곱 $9/(6-q)^2$이 양수이고 합도 양수이므로, 두 근은 모두 양수이다. 따라서 이 방정식의 두 근은 정확히 두 T 값이다.

검산

- $p = \frac{7}{8}$로 두자. 그러면 $r^2 + r + \frac{1}{8} = 0$에서 $r = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{4}$를 얻고, 둘 다 $(-1, 0)$에 있다. 이에 대응하는 합 $S \approx 0.873$과 $S \approx 0.540$은 $\frac{17}{8}S^2 - 3S + 1 = 0$을 만족하며, 이 방정식의 두 근의 합은 $\frac{24}{17} \approx 1.412$, 곱은 $\frac{8}{17}$이다.
- $q = 1$로 두자. 그러면 $3r^2 + 2r = 0$에서 $r = 0$ 또는 $r = -\frac{2}{3}$이므로 $T = 1$ 또는 $T = \frac{9}{25}$이다. 이차방정식은 $25T^2 - 34T + 9 = (T-1)(25T-9)$가 되어 예상과 일치한다.
- 경계 $q = \frac{2}{3}$에서 이차방정식은 $\frac{256}{9}T^2 - 32T + 9 = 0$이고, 판별식은 $1024 - 1024 = 0$이다. 이 방정식은 중근 $T = \frac{9}{16} = 1/(1+\frac{1}{3})^2$을 가지며, 이는 유일한 값 $r = -\frac{1}{3}$과 맞아떨어진다.
- 각 범위에서 p와 q의 무작위 값 수천 개를 컴퓨터로 확인하였다. 근의 개수와 두 이차방정식이 모두 일치한다.

흔한 실수

- $r = \pm 1$이 제외된다는 것을 잊는 실수. 그러면 $p = 1$을 "값이 두 개"인 경우에 잘못 넣고, $q = 2$를 "유일한" 경우에서 잘못 빼게 된다.

- T가 역시 유일하게 결정되는 고립된 값 $q = \frac{2}{3}$(꼭짓점(vertex))을 빠뜨리는 실수.
- 새로운 근이 끼어들지 않았는지 확인하지 않고 제곱하는 실수.

STEP 너머

이 문제는 사실 함수가 언제 역함수를 가지는지(invertible)에 관한 것이다. 사상 $r \mapsto p$는 정의역(domain)의 일부에서는 일대일이고 나머지에서는 이대일이며, 답은 식뿐 아니라 정의역에도 달려 있다. 급수 $\sum r^n$과 $\sum nr^{n-1}$은 멱급수(power series)와 그것을 항별로 미분한 것이다. 수렴반지름(radius of convergence) 안에서 항별 미분이 허용되는 이유는 대학 1학년 해석학(analysis)의 표준적인 결과이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 멱급수와 고른수렴(uniform convergence)을 꼼꼼하면서도 읽기 쉽게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.