풀이

# STEP I 2017, 문제 3

순수수학 • 포물선의 접선

> **STEP I 2017, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q3

## 핵심 아이디어

여기서 다루는 모든 것은 매개변수(parameter) $p$와 $q$로 나타낼 수 있으므로, $R$, $S$, $T$의 좌표를 구한 다음 두 넓이를 직접 계산하는 것이 계획이다. 삼각형 $RST$는 변 $ST$가 $y$축 위에 놓여 있어서 특히 다루기 쉽다. 높이가 단순히 $R$에서 $y$축까지의 거리이기 때문이다. 한 꼭짓점이 원점에 있는 삼각형 $OPQ$의 경우에는 공식 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$를 쓰면 한 줄로 끝난다.

## 풀이

### $P$에서의 접선

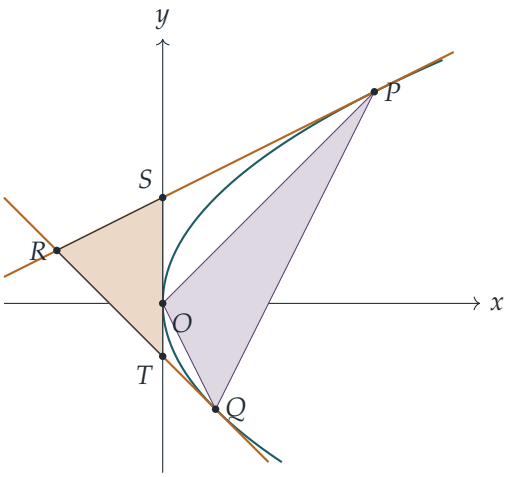
$y^2 = 4ax$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $2y\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4a$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{y}$이다. $y = 2ap \neq 0$인 점 $P$에서($a, p > 0$이므로) 기울기는

$$\frac{2a}{2ap} = \frac{1}{p}.$$

이다. 따라서 $P(ap^2, 2ap)$를 지나는 접선(tangent)은

$$y - 2ap = \frac{1}{p}\left(x - ap^2\right) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{p}\,x - ap + 2ap = \frac{1}{p}\,x + ap,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. 같은 방법으로, $Q$는 $p$ 대신 $q$를 넣은 같은 꼴이므로($q \neq 0$) $Q$에서의 접선은 $y = \dfrac{1}{q}\,x + aq$이다.




그림은 $a = 1$, $p = 2$, $q = -1$인 경우이다. $R$은 $y$축의 왼쪽에 있고, 높이로 보면 $S$와 $T$ 사이에 있다.

**점** $R$, $S$, $T$

각 접선에 $x = 0$을 대입하면

$$S = (0,\, ap), \qquad T = (0,\, aq).$$

이다. $R$에서 두 접선이 만나므로

$$\frac{x}{p} + ap = \frac{x}{q} + aq \quad \Longrightarrow \quad x\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = a(q-p) \quad \Longrightarrow \quad x \cdot \frac{q-p}{pq} = a(q-p).$$

이다. $p > 0 > q$이므로 $q - p \neq 0$이고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다(두 접선이 평행하지 않아 $R$이 존재하는 이유도 이것이다). 그러므로 $x = apq$이고, $y = \dfrac{apq}{p} + ap = a(p+q)$이다.

$$R = (apq,\ a(p+q)).$$

> **생각해 보기** $R$은 $y$축의 어느 쪽에 있는가? 그리고 그것이 넓이를 구할 때 왜 중요한가?

$p > 0$이고 $q < 0$이므로 곱 $pq$는 음수이고, 따라서 $R$의 $x$좌표 $apq$는 음수이다. 즉 $R$은 $y$축의 왼쪽에 있고, 축까지의 거리는 $a|pq| = -apq$이다. 넓이는 양수여야 하므로, $apq$를 그대로 "높이"라고 쓰지 말고 부호를 꼼꼼히 따져야 한다.

**삼각형 $RST$의 넓이**

$ST$를 밑변으로 잡는다. 밑변은 $y$축 위에 있고 길이는 $ap - aq = a(p-q)$이며, $p > q$이므로 양수이다. $R$에서 $y$축에 내린 수선의 길이, 즉 높이는 $-apq$이다. 따라서

$$[RST] = \tfrac{1}{2} \cdot a(p-q) \cdot (-apq) = -\tfrac{1}{2}a^2pq(p-q).$$

**삼각형 $OPQ$의 넓이**

꼭짓점이 $O$, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$이다. $P(ap^2, 2ap)$, $Q(aq^2, 2aq)$를 대입하면

$$x_1y_2 - x_2y_1 = ap^2 \cdot 2aq - aq^2 \cdot 2ap = 2a^2pq(p-q).$$

이다. 여기서 $a^2 > 0$, $pq < 0$, $p - q > 0$이므로 이 값은 음수이고,

$$[OPQ] = \tfrac{1}{2} \cdot (-2a^2pq(p-q)) = -a^2pq(p-q).$$

**결론**

두 결과를 비교하면

$$[OPQ] = -a^2pq(p-q) = 2\left(-\tfrac{1}{2}a^2pq(p-q)\right) = 2\,[RST],$$

이므로, 삼각형 $OPQ$의 넓이는 삼각형 $RST$의 넓이의 두 배이다. 이것으로 증명이 끝난다.

## 검산

그림의 경우인 $a = 1, p = 2, q = -1$에서는 $P(4,4), Q(1,-2), R(-2,1), S(0,2), T(0,-1)$을 얻는다. 그러면 $[RST] = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$이고 $[OPQ] = \frac{1}{2}|4 \cdot (-2) - 1 \cdot 4| = 6$이므로 정확히 두 배이다. $R$이 두 접선의 방정식을 모두 만족하는지도 확인할 수 있다. $1 = \frac{-2}{2} + 2$이고 $1 = \frac{-2}{-1} - 1$이다. 이 등식은 $a$, $p$, $q$를 무작위로 2000번 골라 컴퓨터로 정확한 산술(exact arithmetic)을 써서 확인하기도 했다.

## 흔한 실수

- 삼각형 $RST$의 높이를 $apq$로 쓰는 것. $R$은 $y$축을 기준으로 곡선의 반대편에 있으므로 이 값은 음수이다.
- $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$에서 절댓값(modulus)을 빠뜨려 $OPQ$의 넓이가 음수로 나오는 것.
- $q - p$가 0이 아닌 이유를 밝히지 않고 이것으로 나누는 것.

## STEP 너머

매개변수 표현(parametrisation) $(at^2, 2at)$를 쓰면 포물선(parabola) 위의 모든 점이 하나의 수 $t$에 대응하고, $t = p$와 $t = q$에서의 두 접선은 언제나 $(apq, a(p+q))$에서 만난다. 즉 매개변수의 "곱"과 "합"으로 정해지는 점이다. 이와 같은 결과는 여기서 본 2 : 1 넓이 비와 함께, 접선과 현을 매개변수와 행렬식(determinant)으로 연구하는 이차곡선(conic)의 고전적인 사영기하학(projective geometry)의 일부이다. 삼각형 넓이의 행렬식 공식은 넓이를 부호가 있는 선형적인 양으로 보는 관점의 출발점이 되며, 이 관점은 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)에서 전개된다. 또한 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에는 매개변수 곡선을 다루는 STEP 형식의 연습 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.