풀이

STEP I 2017, 문제 2

순수수학 • 부등식의 적분

> **STEP I 2017, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q2

핵심 아이디어

적분(integration)은 부등식(inequality)을 보존한다. 즉 $a < b$인 구간(interval) $[a, b]$에서 $f(t) \leq g(t)$이면 $\int_a^b f \leq \int_a^b g$이다. 주의할 점은 적분 방향뿐인데, $x < 1$일 때는 구간 $[1, x]$가 거꾸로 진행하므로 부등호의 방향이 바뀐다. 마지막 소문항에서도 같은 아이디어를 다시 쓴다. 음이 아닌(non-negative) 함수를 1부터 y까지 적분하면 그 값의 부호는 $y - 1$의 부호와 같고, 바로 이 부호를 알아야 안전하게 나눌 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$x \geq 1$인 경우. $1 \leq t \leq x$에서 $\frac{1}{t} \leq 1$이고 구간이 정방향으로 진행하므로

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^x 1\,\mathrm{d}t, \qquad \text{즉} \qquad \ln x \leq x - 1.$$

$0 < x \leq 1$인 경우. 이번에는 $x \leq t \leq 1$에서 적분하는데, 여기서 $t \leq 1$이므로 $\frac{1}{t} \geq 1$이다. 따라서

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geq \int_x^1 1\,\mathrm{d}t, \qquad \text{즉} \qquad -\ln x \geq 1 - x.$$

양변에 -1을 곱하면 부등호의 방향이 바뀌어 다시 $\ln x \leq x - 1$을 얻는다. 그러므로 $(*)$는 모든 $x > 0$에 대하여 성립한다.

소문항 (ii)

$x \geq 1$인 경우. $t \geq 1$이면 $\frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{t}$이므로

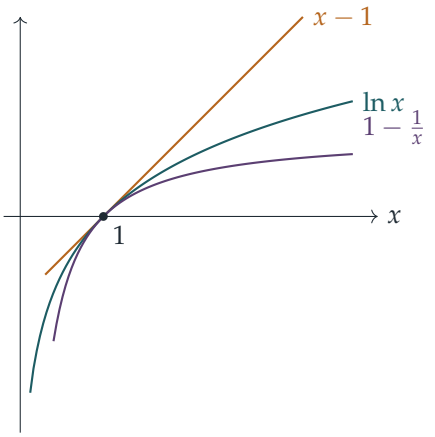
$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{즉} \qquad 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x.$$

$0 < x \leq 1$인 경우. $x \leq t \leq 1$에서는 부등호의 방향이 바뀌어 $\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{t}$이다($t \leq 1$의 양변에 양수 $\frac{1}{t^2}$을 곱한다). 구간 $[x, 1]$에서 적분하면

$$\frac{1}{x} - 1 \geq -\ln x,$$

이고, 양변에 -1을 곱하면 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$를 얻는다. 그러므로 $(**)$는 모든 $x > 0$에 대하여 성립한다.

(다른 방법으로, $(**)$는 $(*)$에서 곧바로 나온다. $(*)$의 x 자리에 $1/x$를 대입하면 $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$이다.)



세 곡선은 모두 $x = 1$에서 접하고, 그 점에서 각각의 기울기(gradient)는 1이다. $\ln x$는 나머지 두 곡선 사이에 끼어 있다.

소문항 (iii)

$(*)$와 $(**)$는 모두 어떤 함수가 $x > 0$에서 음이 아니라는 뜻이다.

$$f(x) = x - 1 - \ln x \geq 0, \qquad g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x} \geq 0.$$

이런 함수를 적분할 때 쓰이는 간단한 사실 하나가 필요하다.

생각해 보기 모든 $x > 0$에 대하여 $h(x) \geq 0$이면, $y < 1$일 때 $\int_1^y h(x)\,\mathrm{d}x$의 부호는 무엇인가?

$y > 1$이면 정방향 구간에서의 적분이므로 그 값은 ≥ 0이다. $0 < y < 1$이면 $\int_1^y h = -\int_y^1 h \leq 0$이다. 어느 경우든

$$(y-1)\int_1^y h(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; 0.$$

이 사실 덕분에 $y > 1$인 경우와 $0 < y < 1$인 경우를 한꺼번에 다룰 수 있다.

$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$가 필요하다($u = \ln x$로 두고 부분적분(integration by parts)한다). 따라서

$$\int_1^y \ln x\,\mathrm{d}x = y\ln y - y + 1.$$

오른쪽 부등식. f를 적분하면

$$\begin{aligned}\int_1^y f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{(y-1)^2}{2} - (y\ln y - y + 1) = \frac{(y-1)^2}{2} + (y-1) - y\ln y \\ &= \frac{(y-1)(y+1)}{2} - y\ln y.\end{aligned}$$

위의 사실에 의하여

$$(y-1)\left[\frac{(y-1)(y+1)}{2} - y\ln y\right] \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{(y-1)^2(y+1)}{2} \geq y(y-1)\ln y.$$

$y > 0$이고 $y \neq 1$이므로 $y(y-1)^2$은 양수이고, 이것으로 나누어도 부등호의 방향은 그대로이다.

$$\frac{y+1}{2y} \geq \frac{\ln y}{y-1}.$$

왼쪽 부등식. g를 적분하면

$$\int_1^y g(x)\,\mathrm{d}x = (y\ln y - y + 1) - (y-1) + \ln y = (y+1)\ln y - 2(y-1).$$

위의 사실에 의하여

$$(y-1)[(y+1)\ln y - 2(y-1)] \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad (y+1)(y-1)\ln y \geq 2(y-1)^2.$$

이제 $(y+1)(y-1)^2 > 0$으로 나누면

$$\frac{\ln y}{y-1} \geq \frac{2}{y+1}.$$

두 결과를 합치면

$$\frac{2}{y+1} \leq \frac{\ln y}{y-1} \leq \frac{y+1}{2y} \qquad \text{단, } y > 0,\ y \neq 1,$$

이므로 증명이 끝난다.

생각해 보기 왜 곧바로 나누지 않고, 나누기 전에 먼저 $y-1$을 곱하는가?

부등식을 $y-1$로 나누면 $y<1$일 때 부등호의 방향이 바뀌므로 두 경우로 나누어야 한다. 먼저 $y-1$을 곱하면 $(y-1)^2$을 포함한 식이 나오는데, 이 값은 1의 어느 쪽에 있든 양수이므로 하나의 논증으로 두 경우를 모두 처리할 수 있다.

검산

- $y=2$일 때: $\frac{2}{3}\approx 0.667 \le \ln 2 \approx 0.693 \le \frac{3}{4}=0.75$.
- $y=\frac{1}{2}$일 때: $\frac{4}{3}\approx 1.333 \le 2\ln 2 \approx 1.386 \le \frac{3}{2}$.
- $y\to 1$일 때 세 식은 모두 1로 수렴하며(가운데 식은 1에서 ln의 기울기이다), 이는 그림에서 곡선들이 접하는 것과 일치한다.
- y를 $1/y$로 바꾼 뒤 양변을 y로 나누면 정확히 같은 부등식 쌍이 다시 나온다. 따라서 $0<y<1$에 대한 결과는 $y>1$에 대한 결과와 동치이다.

흔한 실수

- $x<1$일 때 구간 $[1,x]$에서 적분하면서 부등호의 방향이 바뀐다는 것을 알아채지 못한다.
- $y-1$의 부호를 생각하지 않고 $y-1$로 나누어, 소문항 (iii)을 $y>1$인 경우에만 증명한다.

STEP 너머

가운데 양 $\dfrac{\ln y}{y-1}$은 1과 y의 **로그 평균**(*logarithmic mean*)의 역수(reciprocal)이므로, 왼쪽 부등식은 로그 평균이 산술평균(arithmetic mean) $\frac{1+y}{2}$ 이하라는 뜻이다. 사실 로그 평균은 기하평균(geometric mean) $\sqrt{y}$ 이상이기도 하며, 이로부터 $\frac{\ln y}{y-1} \le \frac{1}{\sqrt{y}}$를 얻는데, 이는 $\frac{y+1}{2y}$보다 더 정밀한 상계이다. 부등식을 적분하는 기법과 그것을 정당화하는 적분의 단조성(monotonicity)은 대학 첫 해석학(analysis) 강의의 기본 도구이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 적분을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.