풀이

STEP I 2017, 문제 11

역학 • 마찰이 있는 강체의 정역학

> **STEP I 2017, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q11

핵심 아이디어

모든 일은 상자의 한 수직 단면(cross-section) 안에서 일어나며, 이 단면은 α만큼 기울어진 정사각형이다. 따라서 자연스러운 좌표축은 수평과 수직이 아니라 상자 바닥을 따르는 방향과 상자 옆면을 따라 올라가는 방향이다. 그러면 두 수직항력(normal reaction)이 좌표축 방향을 향하므로 무게만 분해하면 된다. 두 방향으로 힘을 분해(resolving)하면 수직항력 사이의 관계식 하나를 얻고, 중점에 대한 모멘트(moment) 방정식(이 방정식에서는 무게가 사라진다)이 두 번째 관계식을 준다. 이 둘을 tan의 덧셈정리(compound-angle formula)로 비교하면 답이 나온다.

풀이

모형과 힘

막대를 균일한 강체(rigid body) 막대로 보고, 막대를 포함하는 연직 평면에서 생각한다. 이 평면에서 상자의 바닥은 최대 경사선을 따라 수평과 α의 각을 이루며, O를 지나는 옆면은 바닥에 수직이다. O에서 다음과 같이 좌표축을 잡는다.

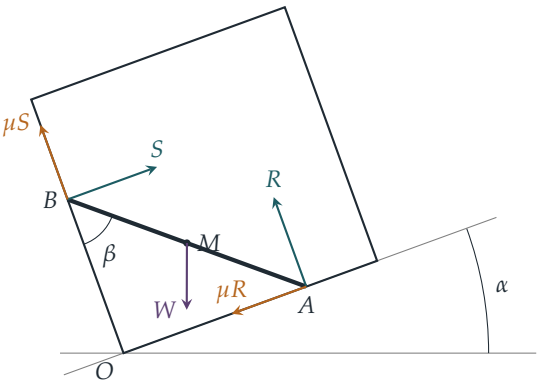
- x축은 상자 바닥을 따라 경사면 위쪽(A 쪽)을 향한다.
- y축은 상자 옆면을 따라 경사면에 수직인 방향(B 쪽)을 향한다.

옆면은 바닥에 수직이므로 삼각형 OAB는 O에서 직각이고, B에서의 각은 β이다. 따라서

$$OA = 2L\sin\beta, \qquad OB = 2L\cos\beta.$$

$\mu = \tan\gamma$로 놓는다. 막대에 작용하는 힘은 다음과 같다.

- A에서: $+y$ 방향의 수직항력 R, 그리고 O 쪽($-x$ 방향)을 향하는 마찰력(friction) μR. A는 O에서 멀어지는 쪽으로 막 미끄러지려 하고 마찰은 한계 상태이기 때문이다.
- B에서: $+x$ 방향의 수직항력 S, 그리고 O에서 멀어지는 쪽($+y$ 방향)을 향하는 마찰력 μS. B는 O 쪽으로 막 미끄러지려 하기 때문이다.
- 중점 M에서 연직 아래로 작용하는 무게 W. y축은 연직 위 방향과 각 α를 이루므로, 무게의 x 방향 성분은 $-W\sin\alpha$, y 방향 성분은 $-W\cos\alpha$이다.



힘의 분해

상자 바닥 방향(x)과 옆면 위쪽 방향(y)으로 분해하면

$$S - \mu R - W\sin\alpha = 0, \tag{1}$$

$$R + \mu S - W\cos\alpha = 0. \tag{2}$$

$R + \mu S = W\cos\alpha \neq 0$이므로 (1)을 (2)로 나누면

$$\frac{S - \mu R}{R + \mu S} = \tan\alpha. \tag{3}$$

중점에 대한 모멘트

무게는 M에 작용하므로 M에 대한 모멘트가 없다. M을 기준으로 할 때 점 A의 위치는 $(L\sin\beta,\ -L\cos\beta)$이고 B의 위치는 $(-L\sin\beta,\ L\cos\beta)$이다. 그림에서 시계 반대 방향 모멘트를 잡으면(상대 위치 (p,q)에 작용하는 힘 (F_x, F_y)의 모멘트는 $pF_y - qF_x$이다)

$$\text{점}A: \quad L\sin\beta\cdot R - (-L\cos\beta)(-\mu R) = LR(\sin\beta - \mu\cos\beta),$$

$$\text{점}B: \quad -L\sin\beta\cdot\mu S - L\cos\beta\cdot S = -LS(\cos\beta + \mu\sin\beta).$$

이 둘의 합은 0이어야 하므로

$$R(\sin\beta - \mu\cos\beta) = S(\cos\beta + \mu\sin\beta).$$

이제 $\mu = \tan\gamma$를 대입하고 양변에 $\cos\gamma$(양수이다)를 곱하면

$$R(\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma) = S(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma),$$
$$\text{즉,}\quad R\sin(\beta-\gamma) = S\cos(\beta-\gamma).$$

? **생각해 보기** R과 $\cos(\beta-\gamma)$로 나누어도 될까?

두 수직항력은 모두 미는 힘이므로 $R > 0, S > 0$이다. 그러면 $\sin(\beta-\gamma)$와 $\cos(\beta-\gamma)$가 동시에 0일 수는 없고, $R, S > 0$에 대하여 $S\cos(\beta-\gamma) = R\sin(\beta-\gamma)$이므로 둘의 부호가 같다. 따라서 어느 것도 0이 아니며 $\tan(\beta-\gamma) > 0$이다. β와 γ가 모두 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 속하므로 $\beta-\gamma$는 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에 속하고, 결국

$$\frac{S}{R} = \tan(\beta-\gamma), \qquad 0 < \beta-\gamma < \tfrac{1}{2}\pi. \tag{4}$$

종합하기

(3)의 좌변의 분자와 분모를 R로 나누고, $k = S/R = \tan(\beta-\gamma)$, $\mu = \tan\gamma$로 쓰면

$$\tan\alpha = \frac{k-\mu}{1+k\mu} = \frac{\tan(\beta-\gamma)-\tan\gamma}{1+\tan(\beta-\gamma)\tan\gamma} = \tan\big((\beta-\gamma)-\gamma\big) = \tan(\beta-2\gamma),$$

이다. 여기서 덧셈정리를 이용하였다(분모 $1+k\mu$가 양수이므로 정의되지 않는 부분은 없다). (4)와 $0 < \gamma < \frac{1}{2}\pi$에 의해

$$\beta - 2\gamma = (\beta-\gamma) - \gamma \in \left(-\tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{1}{2}\pi\right),$$

이고, $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$이기도 하다. 탄젠트 함수는 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 일대일(one-to-one)이므로 $\tan\alpha = \tan(\beta-2\gamma)$로부터

$$\beta = \alpha + 2\gamma,$$

가 반드시 성립하며, 이것이 증명하려던 결과이다. 이는 문제에 주어진 조건 $\alpha < \beta$와도 들어맞으며, 또한 이러한 배치는 $\alpha + 2\gamma < \frac{1}{2}\pi$일 때에만 가능하다는 것도 알려 준다.

검산

- **매끄러운 상자**: $\gamma = 0$이면 결과는 $\beta = \alpha$가 된다. 이를 직접 확인해 보자. 마찰이 없으면 두 수직항력은 P에서 만나는데, P는 AB를 대각선으로 하고 변이 상자의 면을 따르는 직사각형의 네 번째 꼭짓점이다. 평형 상태에 있는 세 힘은 한 점에서 만나야(concurrent) 하므로, M을 지나는 무게의 작용선은 P를 지나야 한다. 즉 MP는 연직이다. 대각선 MP는 OB를 O에서 멀어지는 쪽으로 β만큼 돌린 방향과 평행하고, OB 자체는 연직선에서 O 쪽으로 α만큼 기울어져 있다. 따라서 MP는 연직선과 $\beta-\alpha$의 각을 이루며, 정확히 $\beta = \alpha$일 때 연직이 된다.

- **수치 예**: $\alpha = 20°$, $\gamma = 15°$로 잡으면 $\beta = 50°$이다. 이때 (1)과 (2)로부터 $R \approx 0.791W$, $S \approx 0.554W$(둘 다 양수)이고, $S/R \approx 0.700 \approx \tan 35°$이며, M에 대한 모멘트의 합은 0이 된다.

흔한 실수

- 수평과 수직 방향으로 분해하는 것. 이렇게 해도 풀리기는 하지만, 네 개의 접촉력을 모두 분해해야 하므로 계산이 훨씬 복잡해진다.
- 마찰력의 방향을 잘못 잡는 것. 마찰력은 일어나려는 운동을 방해한다. A에서는 O 쪽을, B에서는 O에서 멀어지는 쪽(옆면 위쪽)을 향한다.
- 두 각이 tan가 일대일인 구간에 속하는 이유를 밝히지 않고 $\tan\alpha = \tan(\beta - 2\gamma)$로부터 결론을 내리는 것.

STEP 너머

$\mu = \tan\gamma$로 두고 마찰력을 μR로 쓰는 것은 **마찰각**(angle of friction)의 개념이다. 극한 평형(limiting equilibrium) 상태에서 전체 접촉력은 법선을 축으로 하고 반각이 γ인 "마찰 원뿔(friction cone)"의 경계 위에 놓인다. 거친 면에 기대어 놓인 강체에 관한 문제는 이러한 원뿔과 한 점에서 만나는 세 힘에 관한 기하 문제가 되며, 쐐기, 사다리, 쌓아 올린 물체의 안정성 같은 문제에도 같은 그림이 깔려 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 토크를 기본 원리부터 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.