풀이

STEP I 2017, 문제 10

역학 • 연쇄 충돌

> **STEP I 2017, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q10

핵심 아이디어

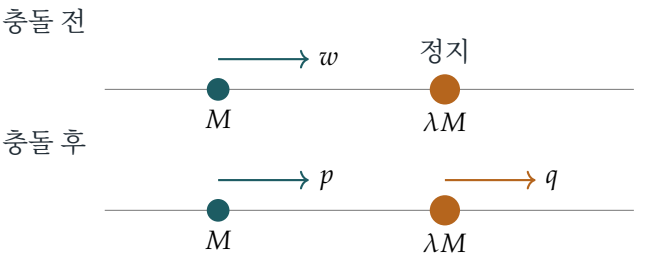
사슬 속의 모든 충돌은 같은 모양이다. 질량 M인 입자가 속력 w로 움직여 정지해 있는 질량 λM인 입자와 부딪친다. 따라서 이 충돌 하나를 비 λ로 나타내어 한 번만 풀면, 사슬 전체는 이를 되풀이하여 얻어지고 등비수열(geometric sequence)이 나온다. 그다음 각 소문항에서는 입자들이 충돌 후에 갖는 속도를 비교하여, 어떤 입자가 앞의 입자를 따라잡는지 살펴보면 된다.

풀이

모든 입자를 x축 위를 움직이는 점으로 모형화하고, 속도는 x축의 양의 방향을 기준으로 잰다.

전형적인 충돌 하나

질량 M인 입자 A가 속력 w로 움직여 정지해 있는 질량 λM인 입자 B와 부딪친다. 충돌 후 두 입자의 속도를 각각 p, q라 하자.



운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)에 의해

$$Mw = Mp + \lambda Mq, \qquad q - p = ew.$$

첫째 식에 $p = q - ew$를 대입하면 $w = q - ew + \lambda q$이므로

$$q = \frac{1+e}{1+\lambda}\, w, \qquad p = q - ew = \frac{1-\lambda e}{1+\lambda}\, w.$$

$r = \dfrac{1+e}{1+\lambda}$, $s = \dfrac{1-\lambda e}{1+\lambda}$로 놓자. 이때

$$q - p = ew > 0,$$

이므로 이런 충돌 직후에는 언제나 두 입자가 서로 멀어진다.

소문항 (i)

첫 번째 충돌은 P(질량 m, 속력 u)가 P_1(질량 λm)과 부딪치는 것이다. $w = u$, $M = m$으로 두면

$$u_1 = \frac{1+e}{1+\lambda}\, u,$$

로 요구된 결과를 얻고, P는 속도 su를 갖게 된다.

이어서 P_1이 움직여 질량 $\lambda^2 m = \lambda \cdot (\lambda m)$인 P_2와 부딪친다. 질량비가 다시 λ이므로 이는 $w = u_1$인 같은 충돌이다. 일반적으로 P_n(질량 $\lambda^n m$)이 속력 u_n으로 P_{n+1}(질량 $\lambda^{n+1} m$)과 부딪치므로 $u_{n+1} = ru_n$이고, P_n은 속도 su_n을 갖게 된다. 따라서

$$u_n = \left(\frac{1+e}{1+\lambda}\right)^n u.$$

여기서 P_n의 첫 번째 충돌은 P_{n-1}에게 부딪히는 것이고, 두 번째 충돌은 P_{n+1}과 부딪치는 것이다. (첫 번째 충돌 직후 P_n은 P_{n-1}에게서 멀어지고 있으므로, 뒤에서 아무것도 먼저 따라잡지 않는다면 다음에 일어날 수 있는 일은 P_{n+1}에 닿는 것이다. 이것이 문제가 의도한 사건의 순서이며, 소문항 (ii)–(iv)에서 실제로 그렇게 일어나는지 확인한다.) 따라서

$$v_n = su_n = \frac{(1-\lambda e)(1+e)^n}{(1+\lambda)^{n+1}}\, u,$$

이고, 이는 x축의 양의 방향을 기준으로 한 속도이다. 속력은 이것의 절댓값이며, 이 차이는 P_n이 튕겨 되돌아가는 경우, 곧 $\lambda e > 1$일 때에만 중요하다.

소문항 (ii)

$e > \lambda$라 하자. 그러면 $\lambda < e < 1$이므로 $\lambda e < 1$이고 $s > 0$이다. 또한 $r > 1$이다.

충돌은 P와 P_1, 이어서 P_1과 P_2, 이어서 P_2와 P_3, 하는 식으로 차례로 일어난다. P_n이 P_{n+1}과 부딪친 뒤, 줄의 뒤쪽부터 입자 $P, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots$의 속도는

$$su,\ su_1,\ su_2,\ \ldots,\ su_n,\ u_{n+1},\ 0,\ 0,\ \ldots$$

이다. $r > 1, s > 0$이고 $u_k = r^k u$이므로

$$0 < su < su_1 < su_2 < \cdots < su_n,$$

이고, $u_{n+1} - su_n = (r-s)u_n = eu_n > 0$이므로 $u_{n+1} > su_n$이다. 따라서 $P, P_1, \ldots, P_{n+1}$ 가운데 각 입자는 바로 뒤의 입자보다 엄격히 빠르게 움직이므로, 이들 중 어느 두 입자도 다시 만날 수 없다. 앞으로 남은 충돌은 P_{n+1}이 정지해 있는 P_{n+2}에 닿는 것뿐이며, 그러면 n 대신 $n+1$에 대하여 같은 논증이 적용된다.

따라서 각 P_n $(n \geq 1)$은 P_{n-1}에게 한 번 부딪히고, 이어서 P_{n+1}과 한 번 부딪치며, 그 밖의 충돌에는 전혀 관여하지 않는다. 즉 각 입자는 정확히 두 번 충돌한다. (이로써 (i)에서 가정한 사건의 순서도 확인된다.)

소문항 (iii)

$e = \lambda$이면 $r = 1$이고 $s = \dfrac{1-e^2}{1+e} = 1-e$이다. 따라서

$$u_n = u \quad \text{이고} \quad v_n = (1-e)u \text{ 모든} n,$$

이며, P 역시 속도 $(1-e)u$를 갖게 된다. 이 운동은 직선을 따라 진행하는 펄스(pulse)이다. 맨 앞의 입자는 언제나 속력 u로 움직이고, 다음 입자와 부딪치면 속력 u를 넘겨주고 자신은 $(1-e)u$로 느려진다. 그 뒤의 모든 입자는 다 함께 $(1-e)u$로 움직이므로 그들 사이에서는 더 이상 충돌이 일어나지 않고, 속력 u인 맨 앞의 입자는 그들에게서 점점 멀어진다. 각 P_n은 정확히 두 번 충돌한다.

N번의 충돌 후 $P, P_1, \ldots, P_{N-1}$은 $(1-e)u$로, P_N(질량 $\lambda^N m = e^N m$)은 u로 움직인다. 운동에너지(kinetic energy)는

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}m(1-e)^2u^2(1+e+\cdots+e^{N-1}) + \tfrac{1}{2}e^N mu^2 &= \tfrac{1}{2}mu^2\left[(1-e)^2\,\frac{1-e^N}{1-e} + e^N\right] \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2[(1-e)(1-e^N) + e^N] \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2[1-e+e^{N+1}].\end{aligned}$$

이를 처음 에너지 $\frac{1}{2}mu^2$로 나누면, N번의 충돌 후 잃은 비율은

$$1 - (1-e+e^{N+1}) = e(1-e^N) \to e \quad \text{as } N \to \infty,$$

이다. $0 < e < 1$이기 때문이다. 이것이 요구된 결과이다.

소문항 (iv)

$\lambda e = 1$이면 $s = 0$이고

$$r = \frac{1+e}{1+1/e} = \frac{e(1+e)}{e+1} = e.$$

따라서 매 충돌마다 움직이던 입자가 완전히 멈춘다. P가 멈추고, 이어서 P_1이 eu로 움직여 P_2와 부딪치고 멈추며, 이런 식으로 계속되어 $u_n = e^n u$, $v_n = 0$이다. 각 P_n은 정확히 두 번 충돌하고, 입자들은 결국 서로 맞닿은 채 정지하며, 단 하나의 입자만이 점점 더 느리게 운동을 앞으로 실어 나른다. P_n이 P_{n+1}에 닿는 데 시간 $1/(e^n u)$가 걸리므로, 충돌 사이의 시간 간격은 한없이 커진다.

? **생각해 보기** 운동량이 보존되는데, 에너지는 어떻게 사라질 수 있을까?

N번의 충돌 후에는 질량 $\lambda^N m = e^{-N} m$, 속력 $e^N u$인 P_N만 움직인다. 그 운동량은 마땅히 그래야 하듯 $e^{-N} m \cdot e^N u = mu$이지만, 운동 에너지는

$$\tfrac{1}{2}\, e^{-N} m\, (e^N u)^2 = e^N \cdot \tfrac{1}{2} m u^2.$$

이다. 운동량은 점점 더 무겁고 점점 더 느린 입자가 실어 나르며, 운동량 p가 일정할 때 운동 에너지 $p^2/(2M)$는 질량 M이 커짐에 따라 0에 가까워진다. 남은 비율 e^N은 0으로 수렴하므로, 결국 처음 운동 에너지가 **모두** 사라진다.

검산

- $e = 1, \lambda = 1$(질량이 같고 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌)이면 $u_1 = u$이고 P는 멈춘다. 익숙한 뉴턴의 요람(Newton's cradle)에서의 속도 교환이다.
- (iii)에서 충돌 한 번($N = 1$)으로 잃는 비율은 $e(1-e)$이다. 직접 계산하면, P는 $(1-e)u$로, 질량 em인 P_1은 u로 움직이게 되므로 남은 에너지는 처음의 $(1-e)^2 + e = 1 - e + e^2$배이고, 결과가 일치한다.
- 정확한 분수로 충돌을 한 단계씩 계산하는 컴퓨터 시뮬레이션으로 u_n, v_n에 대한 공식, $e > \lambda$일 때 각 입자가 두 번씩 충돌하는 양상, 잃은 비율 $e(1-e^N)$($e = \frac{1}{2}$일 때 25번의 충돌 후 0.49999998), 그리고 $\lambda e = 1$일 때 남은 비율 e^N을 확인하였다.

흔한 실수

- 뉴턴의 법칙을 $q - p = -ew$로 쓰거나 순서를 거꾸로 쓰는 것. 멀어지는 속력은 다가오는 속력의 e배이며, 여기서는 둘 다 양수이다.
- 질량비가 **모든** 충돌에서 λ라는 사실을 잊는 것. 바로 이 사실 때문에 답이 등비수열이 된다.

- 사건의 순서를 확인하지 않고 가정하는 것. $e < \lambda$이고 $\lambda e < 1$이면, 뒤에 남겨진 입자가 앞의 입자를, 그 입자가 다음 입자에 닿기 전에 따라잡을 수 있어서 단순한 양상이 깨진다.

STEP 너머

소문항 (iv)는 운동량과 에너지가 매우 다르게 행동함을 보여 준다. 운동량은 정확히 보존되지만, 점점 더 무거운 입자가 운동을 실어 나르기 때문에 에너지는 완전히 빠져나간다. 충돌하는 입자의 사슬은 밀도가 변하는 매질 속을 펄스가 지나가는 방식을 보여 주는 간단한 모형이며, 이산 격자(discrete lattice)에서의 파동 전파(wave propagation)로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)를 이와 같은 세심함으로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.